VNIVERSIDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

MÁSTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Estudio exploratorio del concepto de infinito actual en el Aula de Secundaria: Inconsistencias e incoherencias

---

Autor
Paz Albares Vicente

Tutor
Dra. Carmen López Esteban

Salamanca, Julio de 2017

Declaración de Autoría

Yo, *Paz Albares Vicente*, con DNI 70902645Q, y estudiante de Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en la Especialidad de Matemáticas, por la Universidad de Salamanca, en relación con el Trabajo de Fin de Máster presentado para su evaluación en el curso 2016-2017:

Declaro y asumo la originalidad del TFM; «Estudio exploratorio del concepto de infinito actual en el Aula de Secundaria: Inconsistencias e incoherencias», el cual he redactado de forma autónoma, con la ayuda de las fuentes y la literatura citadas en la bibliografía, y que he identificado como tales todas las partes tomadas de las fuentes y de la literatura indicada, textualmente o conforme a su sentido.

En Salamanca, 14 de Julio de 2017

Fdo.: Paz Albares Vicente

Dña. Carmen López Esteban CERTIFICA que el presente Trabajo de Fin de Máster ha sido realizado bajo su dirección por Dña. Paz Albares Vicente.

En Salamanca, 14 de Julio de 2017

Fdo.: Carmen López Esteban

«To infinity...and beyond»

Buzz Lightyear, Toy Story (1995)

Resumen

Resumen

En el presente trabajo se pretende profundizar en el análisis del objeto matemático conocido como infinito actual en el Aula de Secundaria; a partir del estudio de las posibles coherencias e incoherencias, consistencias e inconsistencias presentadas por los alumnos respecto a este concepto, siguiendo las investigaciones previas de la Dra. Sabrina Garbin, (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005). Dicha investigación se enmarca dentro de una metodología de tipo cualitativo, empleando como instrumento de recogida de datos un cuestionario en el que se contextualizan diversos problemas que involucran el concepto de infinito, expresados en lenguajes matemáticos diferentes.

Palabras clave: infinito actual, incoherencias, inconsistencias, registros de representación semiótica.

Abstract

At the present memoir we intend to deepen into the analysis of the mathematical object known as *actual infinity* in Secondary School. We will take as reference the previous work developed by Dr. Sabrina Garbin (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005), where the possible coherences and incoherences, consistencies and inconsistencies about this concept are widely studied. Our research is framed within a qualitative methodology, using a questionnaire as our data collection instrument, in which some exercises that involve the concept of actual infinity are presented, expressed in different mathematical languages.

Keywords: actual infinity, incoherence, inconsistency, semiotic representations.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación del trabajo

La asignatura de Matemáticas suele presentar ciertas dificultades para los alumnos de Secundaria, en gran medida por el alto grado de abstracción y consecuente complejidad que presentan ciertos contenidos; junto con la implementación de un lenguaje formal. En este contexto, se ha planteado estudiar la concepción del infinito matemático en las aulas de Secundaria, como claro exponente de esta cuestión. En nuestro entorno más cercano, no se encuentran referencias inmediatas que permitan concretar una primera aproximación a esta idea de infinito, pues vivimos y exploramos un mundo finito, (Belmonte y Sierra, 2011). Pero la noción de infinito está intrínsecamente ligada y surge de manera natural en el contexto de las Matemáticas (y no sólo en las Matemáticas), y constituye un concepto clave y continuamente presente en la enseñanza de las Matemáticas para cualquier nivel de aprendizaje. En este sentido, las ideas preconcebidas e intuición constituyen un elemento fundamental en la aproximación del alumnado al tratamiento del objeto matemático del infinito, pudiéndose dar ciertas incoherencias e inconsistencias en su interpretación (Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005).

Unida a la problemática asociada del tratamiento de conceptos formales en la propia disciplina, se deben añadir las consideraciones del panorama actual educativo. Según se especifica en (Belmonte y Sierra, 2011), el concepto de infinito no se trata adecuadamente en el contexto educativo (currículo y textos escolares), pues no se define o se hacen referencias a su significado, ni se acompaña de manual de uso alguno. El primer contacto con la noción de infinito, mediante una mera intuición, tiene lugar a edades tempranas, en el contexto del estudio de la numerosidad de conjuntos; y no es hasta el curso de 1º de Bachillerato (de acuerdo con la nueva reforma educativa) donde se considera el infinito como objeto matemático a partir de la idea y definición formal de límite. El concepto de límite ha sido ampliamente estudiado por sus implicaciones didácticas en relación con el currículo educativo desde una perpectiva histórica (Sierra y cols., 1999, 2002) y en base a las concepciones de los alumnos derivadas de ello (Sierra y cols., 2000). Entonces, se puede afirmar que en nuestro currículo educativo y durante la etapa de aprendizaje de las matemáticas básicas, el infinito desempeña un papel meramente simbólico, o únicamente concebido como sinónimo de muy grande o muy pequeño. Sin embargo, dicho concepto se encuentra íntimamente ligado a innumerables tópicos de las matemáticas, como números periódicos, irracionales y reales, conceptos de sucesión y serie, límite, derivada, integral...

Debido a este carácter singular y multidisciplinar del infinito, y a la propia importancia que posee dicho concepto, tanto en sí mismo como en la enseñanza de las matemáticas, se ha creído conveniente y lícito realizar la presente investigación respecto a este tópico. Se busca profundizar en la cuestión del aprendizaje, tratamiento y concepción del objeto matemático del infinito en los alumnos de Educación Secundaria, intentando responder a la cuestión *¿Cómo se aproximan, comprenden y conocen los alumnos de Secundaria el concepto de infinito?*.

1.2. Estructura del trabajo

Tras un estudio previo de carácter bibliográfico, se ha decidido abordar el análisis de la noción del infinito en el Aula de Secundaria a partir del estudio de las posibles coherencias e incoherencias presentadas por los alumnos respecto a este concepto, siguiendo las investigaciones de la Dra. Sabrina Garbin, (Garbin y Azcárate, 2000; Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005). Entonces, en la presente investigación se elaborará un estudio cualitativo acerca de la concepción del infinito para 36 alumnos de 3º y 4º de Educación Secundaria, empleando como instrumento de recogida de datos un cuestionario ya validado en las referencias anteriores.

En base a este fin, el presente trabajo posee la siguiente estructura:

1. En el *Capítulo 1* de este trabajo se incluye esta pequeña introducción, en la que se presentan brevemente la motivación, objetivos y composición del trabajo.
2. En el *Capítulo 2* se aborda la fundamentación teórica que respalda la presente investigación. Se exploran las distintas nociones existentes del concepto de infinito,

así como un recorrido histórico del mismo. A su vez, se exponen los marcos conceptuales bajo los que se sustenta este trabajo y se analiza el estado de la cuestión a investigar.

3. En el *Capítulo 3* se establece la caracterización y estructura del presente trabajo, identificando y especificando el problema de investigación, los objetivos perseguidos y la metodología empleada en su desarrollo.

4. El *Capítulo 4* constituirá el eje central del presente trabajo. En él se realiza de forma detallada y exhaustiva el análisis de la información obtenida a través de los cuestionarios. Se construirán las redes sistémicas asociadas a cada una de las preguntas, se establecerán las líneas de coherencia y se determinará el sistema de clasificación por categorías del alumnado. Finalmente, se realizará un breve estudio comparativo entre ambas clases, y de la influencia del registro de representación empleado.

5. En el *Capítulo 5* se presentarán las conclusiones generales derivadas de la realización de este trabajo.

- A continuación, después de los capítulos descritos anteriormente, se adjuntará la biliografía empleada en la composición de este trabajo.

- Finalmente, se incluye el Apéndice, en el que se puede consultar el modelo de cuestionario implementado en el estudio, las redes sistémicas desarrolladas en el análisis cualitativo y las respuestas a los cuestionarios por parte de los alumnos de cada uno de los cursos.

Capítulo 2

Marco Teórico

En el presente capítulo se pretende ilustrar de forma general la fundamentación teórica que sustenta la investigación realizada. En primer lugar, y antes que nada, conviene establecer una definición, lo más acotada y unívoca posible, de las distintas terminologías empleadas para designar y tratar el concepto de infinito, la noción de infinito actual e infinito potencial. Acto seguido se adjunta un breve desarrollo histórico sobre la evolución de la concepción del inifinito, con el fin de poder obtener una idea más clara de la dimensión y relevancia de la cuestión a tratar. Asimismo, se ofrecen, de forma breve, un resumen sobre los marcos conceptuales más importantes que legitiman la investigación, así como su problemática fundamental. Entre ellos, cabe destacar las bases presentadas por la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus y conceptos claves como intuición o inconsistencia. Se terminará el presente capítulo mediante la presentación del estado de la cuestión, haciendo referencia a las investigaciones de actualidad en la temática que compete, y una mención especial al trabajo de la Dra. Sabrina Garbin, sobre el cual se fundamenta la presente memoria.

2.1. El concepto de infinito

La noción de infinito se presenta como un concepto complejo y para nada trivial, y por tanto, notablemente difícil de definir. Este término se encuentra íntimamente ligado a una cierta intuición intrínseca, generalmente anclada al mundo finito en el que vivimos (en contraposición a la naturaleza abstracta del propio concepto) y se presenta de forma natural como «algo muy grande» o «que no tiene fin». Esta primera aproximación al infinito, bastante extendida, constituye una definicón vaga y poco clara de dicha noción.

Con el fin de profundizar en el estudio del término, se distinguen distintas tipologías de infinito, de las cuales se pueden resaltar las dos siguientes:

1. **Infinito potencial**. El infinito potencial se concibe a partir de la posibilidad de realizar sucesivamente un determinado proceso, sin que exista una aparente limitación al mismo. La concepción del infinito potencial va íntimamente ligada a la noción del límite considerado como una tendencia infinita, indefinida.

2. **Infinito actual**. El infinito actual se asocia a la idea de totalidad y completitud, de unidad en sí misma. Se podría entender como una entidad definida que engloba totalmente el proceso infinito potencial. La concepción del infinito actual se consigue al superar la operación del paso al límite.

Para poder entenderlo de una forma más explícita, pensemos en los números naturales. Dado un número natural arbitrario siempre se puede obtener el número natural consecutivo, sumándole una unidad. Extrapolando este razonamiento, siempre se podrá obtener el siguiente número natural, y dado éste, el siguiente; y así sucesivamente. La concepción de la generación de los números naturales como un proceso iterativo infinito es lo que proporciona la noción de infinito potencial. Respecto al infinito actual, éste se conseguiría al pensar en el conjunto de los números naturales como un todo.

«El infinito potencial es la concepción de infinito como un proceso. Este proceso se construye empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales) que se refieren a una concepción acción. Repetir estos pasos (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas acciones en un proceso. El infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este proceso», (Dubinsky y cols., 2005).

La noción de infinito actual aplicada a conjuntos induce algunos problemas, que se resuelven al introducir la cardinalidad de dichos conjuntos.

2.2. Breves reseñas históricas sobre el infinito

La problemática del infinito ha sido un tema de gran interés, y ampliamente estudiado, a lo largo de la historia, tanto desde la perspectiva de las Matemáticas como su acercamiento desde otras disciplinas, como la Historia o Filosofía. Recientemente, el estudio sobre la noción de infinito actual o matemático cobra una gran relevancia en el campo de la Psicología y de la Didáctica de las Matemáticas, entre otros ámbitos.

Citando al célebre David Hilbert, uno de los matemáticos más influyentes de los siglos XIX y XX, se nos presenta la siguiente reflexión sobre el infinito: «*¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre*». Esta cita nos evoca la gran trascendencia que ha tenido, y tiene, el concepto de infinito en la conciencia de la Humanidad.

El concepto de infinito aparece por primera vez en Occidente con Anaximandro de Mileto (610 - 546 a.C.), en la época griega, fundamentalmente haciendo a alusiones de carácter filosófico. Los griegos emplearon el término «ápeiron» para designar el infinito, que puede traducirse como «ilimitado» o «indefinido», haciendo referencia no sólo a «algo infinitamente grande, sino también un objeto sin orden, complejo y no caracterizable por un conjunto finito de determinaciones», (Rucker, 1995). Según (Garbin, 2000), esta palabra representaba tres roles en la cultura griega: nombre, adjetivo y adverbio; presente en la mitología, teología o metafísica. De acuerdo con (Luis y cols., 1991), el modo de existencia del infinito arrancó más bien como forma de pensamiento que como objeto matemático.

Asimismo, el concepto de infinito tuvo una gran relevancia en la matemática griega, relativa a problemas de numeración y representación de números, problemas de medida y problemas teóricos acerca de la concepción de los objetos matemáticos en sí. Dentro de esta última categoría surgen las problemáticas más interesantes respecto a la definición del propio concepto de infinito, evidenciándose la dualidad infinito actual-infinito potencial; o proporcionando dilemas filosófico-matemáticos como la finitud/infinitud del universo o la divisibilidad infinita.

En el contexto de la problemática de los tópicos de divisibilidad infinita cabe destacar a Zenón de Elea (490 - 430 a.C.), discípulo de Parménides, con la formulación de las hoy denominadas *paradojas de Zenón*. Estas «paradojas» constituyen un conjunto de argumentos para demostrar la inconsistencia de la multiplicidad o divisibilidad infinita, involucrando conceptos como las nociones de movimiento, tiempo y espacio; mediante un método dialéctico basado en la reducción al absurdo. Las paradojas de Zenón más conocidas son: *la Dicotomía, la de Aquiles y la tortuga, la Flecha y el Estadio*.

Aristóteles (383 - 322 a.C.) estudió profundamente el tema del infinito, concibiendo su existencia como tal, pero tratándolo como un tema delicado influenciado por las paradojas de Zenón. Realizó la distinción entre infinito actual e infinito potencial, aunque «para Aristóteles, el infinito no puede existir más que como potencialidad, su única concepción aceptable es la de un devenir, un proceso sin fin», según (Belmonte, 2009). Aristóteles defendía una concepción esencialmente finitista del Universo aunque preserve una identidad potencial del infinito respecto a la divisibilidad.

El primer contacto con el concepto de infinito actual, desde el punto de vista de la formulación moderna, fue introducido por Galileo (1564 - 1642), que estudió la naturaleza y aritmetización de los conjuntos infinitos. A partir del siglo XVII se comienza a fraguar el desarrollo de las Matemáticas en su concepción moderna, que derivará en la disciplina actual. En esta época tiene lugar el nacimiento del cálculo infinitesimal, de mano de los matemáticos y científicos Newton (1642 - 1727) y Leibniz (1646 - 1716), en los que se trata una concepción potencial del infinito y los inicios de su concepción actual.

Desde entonces, numerosas personalidades han contribuido al estudio y trabajo sobre la noción del infinito. De entre ellos, cabe destacar la influencia de los grandes matemáticos Bolzano (1781 - 1848) y Cantor (1845 - 1918) en el progreso de la cuestión que compete. Bolzano plantea introducir el infinito como objeto de estudio en las matemáticas, concibiendo el infinito como un atributo de una colección, y no como un nombre o un adverbio, (Belmonte, 2009). Bolzano presenta la necesidad de definir el término infinito, ya que había un nuevo nivel de representación de los conjuntos, y esto significaba transformar el infinito en un objeto dentro de un dominio operacional, (Luis y cols., 1991). Por su parte, el trabajo de Cantor presenta un punto de inflexión también crucial en el estudio y formulación del infinito actual. Cantor exploró la naturaleza del continuo y contribuyó al desarrollo la teoría de conjuntos, estableciendo un criterio de correspondencia o comparación de conjuntos basado en la existencia de relaciones biyectivas entre los mismos.

Finalmente, durante la segunda mitad del siglo XIX y siglo XX el estudio del infinito se ha convertido en un elemento fundamental dentro de la disciplina, habiéndose realizado grandes avances. Para un desarrollo más detallado de la perspectiva histórica de la cuestión se pueden consultar (Luis y cols., 1991; Garbin, 2000; Belmonte, 2009).

2.3. Fundamentación teórica

2.3.1. El pensamiento matemático avanzado

Un elemento fundamental en el marco teórico bajo el que se ampara esta investigación es la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus en relación con el desarrollo y crecimiento del denominado *pensamiento matemático avanzado*. En esta teoría se tratará de estudiar y caracterizar el Pensamiento Matemático Avanzado (de ahora en adelante referido por las siglas PMA) frente al Pensamiento Matemático Elemental (PME). La justificiación sobre la fundamentación teórica de nuestro estudio en esta teoría radica en las características particulares de dicho estudio. En el presente trabajo se realizará un análisis cualitativo a través del estudio de un cuestionario en el que se plantean preguntas que involucran conceptos como serie, suma infinita o función, cuyos procesos cognitivos asociados se engloban dentro del dominio del PMA, dado su grado de abstracción.

En (Tall, 1995) se afirma que el lugar de la conversión del PME al PMA no está definido con precisión; pero que existen diferencias entre ambos planteamientos, tales como la complejidad o la frecuencia de uso. Además se especifica que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva, que implica, entre otros aspectos, el uso de las abstracciones formales.

Desde los años 60, el intentar presentar los conceptos y definiciones matemáticas de forma que los estudiantes puedan entenderlos es un tópico de gran interés. Referente a esto, en (Tall y Vinner, 1981) se introducen los términos *concept image* y *concept definition*, que Garbin (2000) traduce como *esquema conceptual* y *definición del concepto*. Estas nociones son de especial relevancia a la hora de considerar la coherencia/incoherencia de los procesos involucrados. Tall y Vinner describen el *esquema conceptual* como toda la estructura cognitiva asociada a la noción matemática en cuestión. También se especifica que «el esquema conceptual no necesita ser coherente todo el tiempo», y que los alumnos «en tiempos diferentes, aparentemente, se pueden evocar imágenes conflictivas». Cuando hablan de *definición del concepto* aluden a una propia definición verbal.

Por otro lado, es importante diferenciar entre los objetos mentales y los objetos físicos, teniendo en cuenta la naturaleza de los objetos matemáticos. «Los objetos matemáticos son de naturaleza distinta a los objetos visuales como percepciones del mundo exterior, los primeros, toman un significado más abstracto», (Garbin, 2000). Según (Tall, 1995), la diferencia de categoría de los objetos mentales hace referencia directamente a la construcción desarrollada durante el crecimiento cognitivo. Esto nos permite diferenciar entre esquema conceptual y la propia manipulación de los objetos mentales en los esquemas. De esta forma, al aludir a la estructura cognitiva, el esquema conceptual emplea el símbolo para conectar adecuadamente procesos y relaciones; tal que estos símbolos (representación semiótica) se puedan manipular como objetos mentales sin necesidad de estar asociado con un esquema físico.

2.3.2. El concepto de intuición

Dentro de la fundamentación teórica cabe mencionar, con especial mención, el concepto de intuición. La noción de intuición, desde la perpespectiva aplicada a las matemáticas, posee una relevancia esencial en la educación matemática, y ha sido ampliamente estudiada en los últimos tiempos (Fischebein, 1982); pues se considera que el conocimiento intuitivo es fundamental y básico, junto al conocimiento analítico, para desarrollar toda actividad matemática.

El concepto aristotélico del infinito es una concepión potencial del mismo, que dominó en las Matemáticas hasta la época moderna, y tuvo una gran influencia en la construcción del concepto de intuición. En (Fischebein, 1982) se destaca que esta concepción potencial del infinito es la asociada con la interpretación intuitiva del infinito, «un objeto potencialmente infinito [...] tiene un signficado *conductural*. Un infinito actual no tiene un significado conductural, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva». En resumen, se puede afirmar sin pérdida de generalidad, que las actividades que involucren una noción actual para el infinito pueden resultar contraintuitivas (Garbin, 2000).

En la línea de intentar profundizar en la caracterización de este concepto de intuición, se cree importante mencionar que las cogniciones intuitivas poseen las siguienes características: cogniciones directas y autoevidentes, certeza intrínseca, coersión, capacidad de extrapolar y globalidad, descritas en (Fischebein, 1998). Fischbein también distingue entre las intuiciones de aceptación e intuiciones de anticipación.

2.3.3. Inconsistencias

El tópico de las inconsistencias se presenta como otro tema de especial relevancia para el estudio desarrollado en nuestro trabajo. En el año 1990 varios investigadores del área de la Didáctica de las Matemáticas dedicaron un volumen entero de la revista *Focus on Learning Problems in Mathematics* al estudio de las inconsistencias, donde el objetivo fundamental era profundizar en el conocimiento básico sobre esta materia y establecer así un campo de estudio viable. Según (Garbin y Azcárate, 2002) algunos investigadores (Wilson, Tall, Tirsoh y Graeber) presentaban investigaciones empíricas, otros (Behr y Harel; Vinner) aportaban discusiones teóricas y otros trataban el tema desde otras perspectivas (Steffe, Tirosh).

Tall determinó tres áreas dentro del ámbito del cálculo y el análisis donde podemos encontrar inconsistencias; y Vinner diferenció dos tipos de inconsistencias (derivadas de un sistema formal y desde el punto de vista psicomatemático) y estableció dos niveles de inconsistencias (superficiales y profundas). Tirosh estableció una clasificación de un total de seis ideas inconsistentes, añadiendo otros tipos de ideas a las propuestas por Vinner, inconsistencias directas e indirectas, validez matemática de las proposiciones, inconsistencias externas e internas, conciencia de los estudiantes de sus inconsistencias. Finalmente mencionar que para un análisis más detallado acerca de la fenomenología de las inconsistencias se puede consultar la bibliografía asociada, citada en (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002).

2.4. Investigaciones actuales en la didáctica del infinito

Tal y como cabe esperar, y dada la naturaleza y fascinación que causa el concepto de infinito, existe una amplísima bibliografía y numerosas investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas sobre el tópico del infinito matemático. A continuaión se enumeran brevemente las investigaciones y los resultados más relevantes, pero se debe resaltar que las contribuciones en este área son más que notables. Para un mayor detalle en el análisis de las investigaciones en cuestión se refiere al lector a (Garbin, 2000; Belmonte, 2009).

- En (Tall, 1992) se realizan estudios sobre la transición del PME al PMA. Además, en él se citan otras investigaciones llevadas a cabo por el mismo autor en el que se introduce el concepto de «measuring infinity», como complemento a las nociones estándar de infinito potencial, infinito actual e infinito cardinal.
- En (Fischbein y cols., 1979) y (Tirosh, 1991) se investigaron los conflictos inherentes a las diferentes concepciones del infinito, y particularizando para el tratamiento de conjuntos.
- (D'Amore, 1996) recoge numerosas investigaciones desarrolladas en los últimos años con el fin de mostrar los diferentes caminos de la investigación matemática sobre el infinito desde una perspectiva de la evolución histórica del propio concepto.
- Finalmente, cabe mencionar otras investigaciones relacionadas con el concepto de infinito como (Riscos, 1996; Tirosh y Tsamir, 1996; Tsamir y Tirosh, 1999; Luis y cols., 1991).

2.5. El Trabajo de Sabrina Garbin

Tal y como se ha especificado previamente, el presente trabajo se basará en las investigaciones previas desarrolladas por la Dra. Sarina Garbin. En líneas generales, en las contribuciones aportadas por dicha investigadora se pretenden identificar las inconsistencias y categorizar las situaciones de coherencia (líneas de coherencia) manifestadas por los estudiantes en relación con sus esquemas conceptuales sobre el infinito actual. Además, introduce el concepto de tarea de conexión, que permite establecer vínculos entre contextos y/o representaciones diferentes en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Se tomará como guía fundamental la tesis doctoral de dicha autora, (Garbin, 2000), titulada «Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16–17 años», y realizada bajo la dirección de la investigadora Carmen Azcárate. Estas dos autoras han realizado un prolífico trabajo relativo al estudio de la temática que compete; pudiendo destacar los siguientes estudios, entre otros, que también habrán servido como elementos esenciales en la realización de este trabajo: (Garbin y Azcárate, 2000, 2001, 2002; Garbin, 2005).

Capítulo 3

El Trabajo de Investigación

Una vez establecida la fundamentación teórica de la cuestión que compete, se procede a profundizar en la propia caracterización y estructura del presente trabajo de investigación. En este capítulo se establece de forma concreta el problema de investigación y se formulan los objetivos perseguidos a través del trabajo. Asimismo, se da cuenta de la metodología empleada en la realización del presente estudio y de los diferentes aspectos técnicos de su desarrollo.

3.1. Problema y objetivos de investigación

Tal y como ya se ha mencionado en capítulos anteriores, la pregunta de investigación principal que ha suscitado la motivación de este trabajo puede resumirse en *¿Cómo se aproximan, comprenden y conocen los alumnos de Secundaria el concepto de infinito?*. A simple vista y de forma trivial, esta pregunta de investigación es demasiado general, dando lugar a un amplio rango de respuestas e interpretaciones, con lo que será necesario precisar y acotar notoriamente el campo de estudio.

Tras un estudio previo de la amplísima literatura existente en torno al tópico de la caracterización y didáctica del concepto de infinito (centrado o no necesariamente sobre alumnos de Educación Secundaria o equivalentes) se ha decidido abordar el análisis de la noción del infinito en el Aula de Secundaria a partir del estudio de las posibles coherencias e incoherencias presentadas por los alumnos respecto a este concepto.

Por ello, el objetivo general de la presente investigación puede entenderse como una primera aproximación al estudio y análisis de las concepciones que poseen los alumnos de Secundaria del concepto de infinito. Para ello se realizará un estudio cualitativo sobre la concepción del concepto de infinito matemático en el aula de Secundaria, donde se pueden considerar los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar los esquemas conceptuales de los estudiantes asociados con el concepto de infinito actual, a través de diferentes representaciones y contextos expresados en lenguajes matemáticos diferentes: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y analítico.

- Analizar, identificar e intentar categorizar las posibles coherencias e incoherencias, consistencias e inconsistencias surgidas del estudio anterior. Describir e interpretar dichas categorías, para poder establecer una clasificación de los estudiantes en función de sus esquemas conceptuales sobre el infinito.

- Efectuar, si hubiera lugar, un análisis del lenguaje utilizado para referirse al infinito en las distintas contextualizaciones presentadas, y cómo éste influye en los estudiantes.

A continuación, tras presentar un esbozo del problema de investigación que ha motivado la realización de este trabajo, se procede a plantear alguna de las hipótesis de investigación asociadas, previas al análisis de resultados propios, y basadas en la lectura y observación de resultados derivados de otros artículos.

- El concepto de infinito en el aula de Secundaria y se presenta como un tópico complejo. La intuición (arraigada necesariamente a la experiencia de nuestro mundo finito) juega un papel fundamental en la concepción del infinito, siendo una de las dificultades fundamentales que presentan los alumnos, y responsable en gran medida de las inconsistencias encontradas en investigaciones anteriores (Barahmand, 2017; Garbin y Azcárate, 2002; Singer y Voica, 2008; Tsamir y Tirosh, 1999).

- Cabe esperar que esta dificultad asociada a la intuición aparezca en las distintas concepciones y tratamientos de la noción de infinito a estudiar; aunque es posible conjeturar que las inconsistencias e incoherencias encontradas en los alumnos varíen en función de la naturaleza de la problemática a tratar. Otra variable determinista a tener en cuenta será la franja de edades sometida a estudio y el nivel educativo y conocimientos previos del alumnado (Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005).

- Es posible que se encuentre una relación directa entre las inconsistencias presentadas por los alumnos y el lenguaje empleado en su desarrollo y consecución.

3.2. Metodología de investigación

El trabajo a llevar a cabo está enmarcado y concebido dentro de una investigación de tipo cualitativo. El análisis de datos es fundamentalmente inductivo, tomando como principal fuente de análisis la información obtenida en el estudio; aunque el diseño de la investigación, el sistema de clasificación de la información y categorías está basado en las investigaciones de la Dra. Sabrina Garbin (Garbin y Azcárate, 2000; Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2001, 2002; Garbin, 2005). El estudio desarrollado posee un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo; y el estar basado en investigaciones previas ya validadas legitima a su vez y le confiere la solidez necesaria a la investigación realizada.

3.2.1. Participantes del estudio

La presente investigación se ha desarrollado con la participación voluntaria de un total de 36 estudiantes de Educación Secundaria, de entre 14 y 17 años de edad, correspondientes a los niveles académicos y educativos de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (18 participantes) y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (18 participantes). La experiencia se realizó con prácticamente la totalidad del alumnado de los cursos de 3º y 4º de la E.S.O. de un único centro escolar, el Colegio San José[1], en la ciudad de Salamanca, siendo éste mi centro asignado durante el periodo del *Practicum* del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, de la Universidad de Salamanca, correspondiente con el curso académico 2016-2017.

De cara al futuro estudio, resulta interesante profundizar en los conocimientos previos del alumnado en el momento de realización de la investigación sobre la materia de Matemáticas, y más concretamente, en el campo del análisis. En este sentido, cabe resaltar que los dos cursos analizados presentan un perfil bastante distinto, lo que podría verse reflejado en los resultados obtenidos:

- El alumnado de 3º de la E.S.O. posee los conocimientos propios de su nivel académico sobre conjuntos numéricos, ecuaciones y sistemas, proporcionalidad y geometría. A su vez, gozan de un conocimiento reciente de funciones, habiendo estudiado la descripción de funciones elementales polinómicas; y sucesiones. No poseen conocimientos formales previos sobre límites.

[1] http://colegiosanjosesalamanca.es

- El alumnado de 4º de la E.S.O. presenta unos conocimientos avanzados en el bloque de análisis matemático correspondiente con el currículo establecido, habiendo estudiado la teoría de funciones al completo, la formalizacion y tratamiento de límites y la introducción al concepto y cálculo de derivadas; todo ello desde el punto de vista teórico y práctico.

Esta dicotomía en la formación previa de los particiantes del estudio aporta un elemento adicional a la investigación realizada, pues además de profundizar en la caracterización del infinito, se podrá analizar la evolución en la concepción de noción de infinito a lo largo del sistema educativo, valorando el factor académico de la educación matemática recibida.

3.2.2. Instrumento de recogida de datos

El instrumento fundamental de recogida de datos se realizará mediante la implementación de un cuestionario a los alumnos. Dado que lo que se pretende analizar es la aproximación y el tratamiento del concepto de infinito en distintos contextos, se estima este método de recogida de información como el más adecuado; pues a través de las diferentes preguntas del mismo, los estudiantes van a poder profundizar y reflexionar sobre sus concepciones preestablecidas sobre la noción del infinito en diversas situaciones, abordando los problemas desde diferentes perspectivas.

El cuestionario implementado está basado en los modelos propuestos en la investigación desarrollada por la Dra. Sabrina Garbin (Garbin y Azcárate, 2000; Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2001, 2002; Garbin, 2005), donde se incluyen breves ejercicios de enunciado con los cuales se pretende analizar el concepto matemático de infinito actual. El cuestionario final consta de un total de 5 preguntas, en las que está presente y se trata el mismo concepto matemático, *el infinito actual*, pero el lenguaje y contexto matemático es distinto en cada problema: geométrico, verbal, analítico, gráfico y algebraico. De esta forma, se busca explorar de manera más profunda la concepción del infinito que poseen los alumnos, valorando además otros factores como el lenguaje y contexto del problema, analizando si se producen variantes en este sentido.

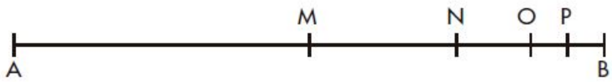
A continuación se adjunta el modelo de cuestionario propuesto y anteriormente analizado en (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005); y posteriormente implementado como eje base de este trabajo de investigación:

Nº:

Cuestionario

1. Observa la siguiente figura.

Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir, los puntos M, N, O, P son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}, \overline{MB}, \overline{NB}$ y $\overline{OB}$, respectivamente:



Si se siguen haciendo más y más bisecciones, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B? Explica tu respuesta.

2. Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura $\frac{h}{2}$.

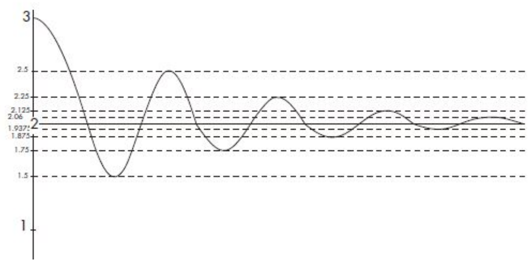
- ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.
- ¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

3. Considera la siguiente suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta.

4. La siguiente figura representa la gráfica de una función:



Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. ¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace muy grande? Explica tu respuesta.

5. Considera la siguiente ecuación:

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta $y = 2$? Explica tu respuesta.

3.2.3. Organizacion de la información y procedimiento de análisis de datos

Tal y como ya se ha mencionado, mediante el cuestionario se pretende caracterizar la noción, tratamiento y aproximación del concepto de infinito por parte de los alumnos en diversas contextualizaciones matemáticas distintas, modelizados por los cinco problemas propuestos.

Se planteó la elaboración del cuestionario a los alumnos en dos sesiones de aula de 50 minutos (una para cada curso), aunque en principio no se ha establecido ningún límite de tiempo para la realización del mismo. Se ha de mencionar que la participación en la realización del cuestionario era totalmente voluntaria; aunque todos los estudiantes de ambos cursos (que se encontraban presencialmente en el aula) participaron diligentemente y con buena actitud. Se ha asegurado en todo momento la confidencialidad de los datos y el anonimato externo de los alumnos (dada la política de confidencialidad del centro), pero a la vez se han tomado medidas internas y de exclusivo conocimiento personal que permitan conocer la autoría de los diferentes cuestionarios en caso de que sea necesario. Para ello, se pidió a los alumnos de cada curso que se identificaran en el cuestionario únicamente mediante su número de la lista, sin ninguna mención explícita a su identidad (nombre, iniciales...). La correspondencia biunívoca entre el nombre de cada alumno y su número de lista es confidencial, y fue facilitado por el tutor de prácticas en su momento. Finalmente, y con el fin de poder distinguir a los alumnos de los diferentes cursos, se ha agregado un dígito adicional a cada código del cuestionario (3 para los alumnos de 3º de E.S.O y 4 para los alumnos de 4º la E.S.O), de forma que cada ejercicio viene determinado por 3 cifras, el primero de los dígitos se corresponde con la cifra del curso, 3 ó 4, seguido de los dos dígitos del número de la lista correspondiente del alumno.

Mencionar que se analizarán de forma separada los cuestionarios realizados por los dos cursos, 3º y 4º de E.S.O., con el fin de poder estudiar con mayor facilidad las respuestas de los grupos con el mismo nivel académico.

Una vez organizada y debidamente codificada la información proporcionada por los cuestionarios, se prevé realizar un análisis de datos inductivo, obteniendo el material de trabajo a partir del estudio de resultados derivado de la recogida de datos. Se hará uso de la siguiente metodología para el análisis de los datos obtenidos, siguiendo las pautas establecidas en (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2001, 2002; Garbin, 2005):

- Se emplea el recurso de las redes sistémicas como instrumento de organización y análisis para los datos cualitativos. Según (Garbin y Azcárate, 2002) «las redes sistémicas posibilitan una configuración de los datos que permite mirar todas las respuestas efectivas de los alumnos encuestados. Estos datos nos interesaban para acercarnos a los esquemas conceptuales de los estudiantes asociados al concepto de *infinito actual*». Para cada una de las preguntas del cuestionario, se construirá la red sistémica asociada y se establecerán los grupos de respuestas. El análisis realizado en este primer paso es un mero análisis exploratorio, descriptivo e interpretativo de las respuestas obtenidas.

- El siguiente paso del análisis de datos versa por la elaboración de tablas resumen a partir de la información obtenida y de las redes sistémicas implementadas en el paso anterior. La implementación de este tipo de tablas persigue dos objetivos fundamentales:

    1. Visualizar la información de una forma compacta, resumida y esquemática.
    2. Obtener y determinar las líneas de coherencia para cada uno de los casos.

- En base a las líneas de coherencia anteriores se plantea construir un sistema de categorías, que permita clasificar adecuadamente cada uno de los casos analizados, proporcionándonos información acerca de los esquemas de la concepción del infinito de los alumnos; así como de las posibles inconsistencias que puedan presentar.

- Finalmente se realizaría una interpretación y comparación global de la totalidad de resultados obtenidos, con la consecuente extracción de conclusiones y generalización de resultados, si ha lugar.

El análisis más detallado de los cuestionarios, profundizando en las particularidades de cada una de las preguntas implementadas, así como las construcción de las redes sistémicas y el establecimiento de las líneas de coherencia se pueden encontrar en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Estudio cualitativo sobre la noción de infinito actual en el Aula de Secundaria

En el presente capítulo se procederá a realizar el análisis pertinente en profundidad de la información obtenida a través de los cuestionarios para los diferentes alumnos. Siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo anterior, y analizando cada uno de los cursos separadamente, se construirán las redes sistémicas asociadas a cada una de las preguntas, se establecerán las líneas de coherencia de cada grupo para obtener, posteriormente, un sistema de clasificación por categorías de alumnado de estudio. Finalmente, se realizará un breve estudio comparativo entre ambas clases, obteniendo los resultados pertienentes.

Además, también se adjuntará un breve análisis del lenguaje (matemático y convencional) empleado por los estudiantes, prestando especial atención a las características fundamentales para cada uno de los cursos y su comparativa.

4.1. Análisis exploratorio. Redes sistémicas

En primer lugar, y antes de proceder explícitamente con la construcción de las redes sistémicas en cada caso, se procede a analizar brevemente cada una de las preguntas especificadas en el cuestionario.

Tal y como se puede apreciar, el cuestionario de estudio posee un total de 5 preguntas, en las que se plantea el mismo tópico matemático abordado mediante registros lingüísticos diferentes, *el infinito actual*. Los 5 problemas planteados representan el problema matemático de la divisibilidad infinita (de una «distancia» finita), haciendo referencia a las míticas paradojas de Zenón. En cambio, cada uno de ellos se aproxima al problema base de forma diferente, empleando diversos lenguajes matemáticos que permiten contextualizar y abordar cada problema desde una perspectiva distinta (aunque el problema subyacente sea el mismo): geométrico, verbal, analítico, gráfico y algebraico. Según (Garbin y Azcárate, 2002) cada problema, en su enunciado, tiene una parte que usa la lengua natural como registro lingüístico, al explicar el problema y la cuestión planteada, y otra parte que usa otro registro de representación semiótica. Como se puede observar, los registros de representación semiótica (indicamos RRL para indicar registro de representación lingüístico y RR registro de representación no lingüístico) que aparecen en el enunciado son:

Pregunta	**Lenguaje matemático**	**Registro de representación semiótica**
1	Geométrico	RR: figura geométrica (segmento de recta)
2	Verbal	RRL: lenguaje natural
3	Analítico	RRL: numérico (suma infinita)
4	Gráfico	RR: representación gráfica cartesiana
5	Algebraico	RRL: escritura algebraica (ecuación)

TABLA 1: Lenguaje matemático y registros de representación semiótica

Para profundizar en el análisis en sí del propio cuestionario u obtener una información más detallada acerca de las características del mismo se remite al lector a (Garbin, 2000), donde se exploran ampliamente estas cuestiones.

El primer aspecto a tener en cuenta, antes de pasar a valorar los resultados directos de la aplicación del cuestionario, es la evaluación del propio nivel de respuesta por parte de los alumnos. A continuación, se adjunta la siguiente tabla donde quedan recogidos el número y el porcentaje de respuestas obtenidas después de la aplicación del cuestionario a los dos grupos de alumnos analizados de forma separada:

Preguntas		1	2		3	4		5
			(a)	(b)		(a)	(b)	
Número de	3º ESO	18	16	17	18	15	18	17
respuestas	4º ESO	17	18	18	18	16	16	17
Porcentaje de	3º ESO	100	88,89	94,44	100	83,33	100	94,44
respuestas	4º ESO	94,44	100	100	100	88,89	88,89	94,44
% Total		97,22	94,44	97,22	100	86,11	94,44	94,44

TABLA 2: Nivel de respuesta de los alumnos

Tal y como se puede observar, el porcentaje de respuesta del alumnado es alto y similar para todas las preguntas. La cuestión 4, apartado *(a)*, es la que ha obtenido un menor porcentaje de respuestas, siendo esta pregunta, de acuerdo con el análisis posterior, una de las cuestiones en la que los alumnos han tenido mayor dificultad, para ambos cursos. Cabe mencionar que se ha considerado como respuesta no contestada aquella que se encontraba en blanco, respuesta de la que no se puede obtener información. De esta forma, en el análisis asociado a las *Preguntas 2-4 (a)-(b)* únicamente se han excluido los alumnos que no presentaron ninguna aportación a estas preguntas de forma global, contabilizando a aquellos alumnos que incluyeran respuestas explícitas en alguno de sus apartados[1]. Este hecho ratifica a su vez, la validez del cuestionario empleado en el presente estudio.

De acuerdo con las pautas de análisis establecidas en el capítulo anterior, el primer paso a seguir para analizar el presente estudio cualitatio consiste en la implementación de redes sistémicas para estructurar y categorizar en primera instancia los datos que se desean analizar. Las redes se estructuran en forma de árbol con ramas que se subdividen en «clases» (empleando como formalismo la llave ($\{$)) que se pueden entender como categorías excluyentes entre sí, sobre las que se clasifican las respuestas de los alumnos. A continuación se procede a determinar las redes sistémicas de cada de las preguntas, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se analizarán de forma separada los cuestionarios de los alumnos de 3º y 4º de la E.S.O.
- Los alumnos se identifican unívocamente con su número de cuestionario, es decir, con el número de la lista correspondiente. En cada red sistémica, a la derecha de cada categoría aparecen los números correspondientes de los alumnos cuya respuesta (explícita o sujeta a interpretación) se corresponde con dicha clase.
- En la parte superior de algunos números puede aparecer el símbolo $*$. Este símbolo $*$ indica que el alumno aporta alguna información adicional a la recogida en la red sistémica, generalmente asociada con alguna representación gráfica o cálculo numérico suplementario. En cada caso se darán las indicaciones pertienentes al respecto.
- En los últimos bloques de la categorización de la red sistémica se han intentado recoger explicaciones pseudo-explícitas aportadas por los alumnos, es decir,

[1]En la Figura 20 se observa que el número de alumnos que no presentaron respuesta explícita a la pregunta en cuestión es alta. En cambio, sí que ofrecieron alguna contribución al apartado (a) de dicha pregunta, por lo que no se les puede catalogar como alumnos que no hayan respondido a esta cuestión.

expresiones literales de los alumnos (o ligeramente modificadas, generalmente por consideraciones de espacio en la elaboración de la red, pero que preserven el sentido) presentes en los cuestionarios.

A continuación se procede a implementar y analizar las redes sistémicas para cada una de las preguntas del cuestionario. Como ejemplo de un estudio más detallado, se presenta el análisis descriptivo de la *Pregunta 1* para ambos cursos, con su desarrollo correspondientes. Con el resto de preguntas se procederá de forma similar, cuyos resultados se pueden consultar en el *Apéndice A*, sección A.1.

4.1.1. Pregunta 1

En la primera pregunta del cuestionario se esperaba agrupar a los alumnos en tres grupos distintos, según sus respuestas al cuestionario (1-3). En cambio, tras leer y analizar las respuestas de los alumnos, se estimó pertinente añadir un último grupo más (4):

1. Los alumnos que respondieron afirmativamente, aquellos que indicaron que el punto de la bisección coincide o alcanza al punto B, punto extremo del segmento a considerar.
2. Los alumnos que respondieron negativamente, aquellos que indicaron (explicitamente) que el punto de la bisección no coincide o no llega a coincidir con el punto B.
3. Los alumnos que no respondieron a la pregunta o no contestaron explícitamente a lo que se les preguntaba.
4. Los alumnos que distinguieron entre la teoría y la práctica.

A continuación se adjuntan el análisis del porcentaje de respuestas por apartado del alumnado y la red sistémica asociada a la *Pregunta 1*, para cada curso:

Grupo	Número de respuestas	Porcentaje de respuestas
1	6	33,33
2	11	61,11
3	1	5,56
4	0	0

TABLA 3: *Pregunta 1*. Porcentaje de respuestas del curso 3º de ESO

- Pregunta 1
  - Responde afirmativamente
    - Proceso iterativo de las bisecciones
      - - (2)
      - - Identifica un número grande o infinito de bi - secciones para poder llegar a B: (5),(17),(18)
      - - Los números son infinitos y siempre se puede dividir: (15)
    - Depende del número de divisiones: (6)
  - Responde negativamente
    - El punto se aproxima o tiende a B
      - - Siempre existe un segmento que biseccionar, (los números son infinitos): (3), (14)
      - - El punto se acerca (infinitamente) a B pero nunca podrá tocarlo porque hay infinitos números: (10), (13)
      - - El punto medio de la bisección nunca podrá coincidir con B: (19)
    - Entre A y B existen infinitos números (con infinitos decimales): (4)
    - Hay números (términos) infinitos y siempre se podrá dividir el segmento en segmentos más pequeños: (7), (16)
    - Habría que hacer infinitas bisecciones: (8)
    - B nunca puede llegar a ser el punto medio de un segmento: (9)*, (21)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (1)*

FIGURA 1: *Pregunta 1*. Red sistémica para el curso 3º de ESO

Y para el curso de 4º de E.S.O:

Grupo	Número de respuestas	Porcentaje de respuestas
1	6	33,33
2	10	55,56
3	1	5,56
4	1	5,56

TABLA 4: *Pregunta 1*. Porcentaje de respuestas del curso 4º de ESO

Pregunta 1
- Responde afirmativamente
  - Proceso iterativo de las bisecciones
    - - (1), (7)
    - - Número infinito de bisecciones para poder llegar a B: (2)
  - El segmento a bisecar cada vez se hace más pequeño, y en algún punto se alcanzará B: (3), (8)
  - Es una sucesión geométrica, cada vez se multiplica por $\frac{1}{2}$, y el límite infinito de la sucesión es 0, por lo que se alcanza B: (6)
- Responde negativamente
  - - El punto se aproxima o tiende a B
    - El punto medio de la bisección nunca podrá coincidir con B, ya que es un extremo
      - - (9), (10)
      - - El límite de las divisiones es B: (13)
  - - No se puede construir el segmento $\overline{BB}$: (4)
  - - Hay infinitos números y al hacer la bisección siempre va a dar otro número: (5)
  - - No sería una bisección: (19)
  - - El punto medio de la bisección no puede coincidir con B, ya que es un extremo (punto fijo o referencia): (12), (15), (20)
  - - B no puede ser el punto medio de un segmento: (22)
- Distingue entre teoría y práctica
  - Matemáticamente, el problema se resuelve como un límite, por lo que el valor «∞» de éste será B; aunque teóricamente nunca se podría alcanzar: (11)
- No responde: (14)

FIGURA 2: *Pregunta 1.* Red sistémica para el curso 4º de ESO

Acto seguido se procede con el análisis descriptivo de las redes sistémicas anteriormente mostradas, en base a las respuestas de los alumnos.

1. El punto de bisección coincide con el punto B

(a) Seis de los alumnos de 3º de la ESO respondieron afirmativamente, es decir, que el punto de bisección coincidía con el punto B.

- Los alumnos (2, 5 y 17) afirman que sí se podría llegar a B, como consecuencia de un proceso iterativo de bisecciones, que conllevará un gran número de ellas. En ningún momento hacen referencia a la finitud o infinitud del proceso de forma explícita, o a que sean necesarias «infinitas» bisecciones. Emplean expresiones del estilo:

  (5): *Coincidiría con el punto B porque al hacer tantas bisecciones chocaría con el punto B.*

  (17): *Es posible que si se hacen más y más bisecciones el punto de bisección coincida con B.*

- El estudiante (15) hace referencia a la infinitud del proceso indicando que existen *infinito números* y que *siempre se puede dividir a la mitad*.

- En cambio, los alumnos (6 y 18) coinsideran que el proceso de bisección es finito. El estudiante (6) alude a la dependecia en el número de divisiones, lo que implica una concepción finitista práctica del problema. En cambio, el estudiante (18) afirma que *va a llegar un punto en el que no se puedan hacer más y B sea el punto medio y la bisección*.

(b) En el curso de 4º de la ESO otros seis alumnos afirman que el punto de la biseccion coincidirá con B.

- Los alumnos (1, 2 y 7) afirman que sí se podría llegar a B, como consecuencia de un proceso iterativo de bisecciones. La sintaxis del estudiante (7) es similar a los argumentos planteados por los alumnos equivalentes de 3º de ESO, haciendo referencia a la iteración del proceso y a la necesidad de considerar muchas bisecciones, pero sin hacer alusión directa a la finitud o infinitud explicita del propio proceso en sí. En cambio, los estudiantes (1 y 2) mencionan explícitamente el término «infinito» en sus redacciones:

  (1): *Llegará al infinito al hacerse más y más bisecciones.*

  (2): *Si se siguen dividiendo los segmentos infinitamente el punto de la bisección coincidirá con B.*

Además, el alumno (2) recalca el hecho de que los segmentos se van haciendo cada vez más pequeños, y que aún así, se podría alcanzar B.

- Los estudiantes (3 y 8) hacen referencia a que la *medida* de las bisecciones o *distancia* entre la bisección y B, va disminuyendo y acercándose a B, de forma que llegue a coincidir con B.
- El estudiante (6) emplea una terminología más formal, haciendo referencia a una *sucesión geométrica* e introduciendo la noción de límite, *si se hace el límite infinito de esa sucesión es 0*, concluyendo que se alcanzaría el punto B.

2. El punto de bisección no coincide con el punto B

(a) Once de los alumnos de 3º de la ESO respondieron negativamente, es decir, que el punto de bisección no coincidiría con el punto B.

- Los alumnos (3, 10, 13, 14 y 19) afirman que, aunque la bisección no coincida con B, sí se aproximará a este punto. Para explicar este fenómeno, los estudiantes se basan en la infinitud de los números, en la existencia de infinitos números entre la bisección y el punto B, y:

  - Que por tanto, siempre se podrá dividir (3, 14), o bien

  - Que al haber infinitos números nunca podrán coincidir «exactamente» dos de ellos, aunque sean muy cercanos (10, 13 y 19).

  A pesar de que en varias ocasiones los alumnos mencionan la infinitud de los números, en nigún caso hacen referencia a un proceso finito o infinito de bisecciones explícitamente.
- Los estudiantes (4, 7 y 16) emplean argumentos similares a los mencionados anteriormente, pero sin explicitar verbalmente que la bisección se aproxima al punto B.
- Los estudiantes (9 y 21) emplean razonamientos geométricos, argumentando que el punto B no puede ser un punto de bisección, al ser considerado como extremo del segmento.
- El alumno (8) argumenta la imposibilidad de alcanzar B (mediante un razonamiento geométrico de realizar la bisección) debido a la infinitud del propio proceso. Hasta el momento, es el único estudiante que ha explicitado directamente la infinitud del proceso de bisección.

(b) En el curso de 4º de la ESO diez alumnos afirman que el punto de la bisección coincidirá con B.

- Los alumnos (9, 10 y 13) afirman que, aunque la bisección no coincida con B, sí se aproxima o tiende a este punto.

  - Los estudiantes (9 y 10) emplean un argumento geométrico, alegando que el punto B no puede ser un punto de bisección.

  - El estudiante (13) matiza que las divisiones serán cada vez más pequeñas, pero que no se alcanzará B, sino que *su límite será* B.

- El alumno (5) se justifica basándose en la infinitud de los números.

- El resto de estudiantes, (4, 12, 15, 19, 20 y 22) emplean el argumento geométrico, al considerar B como el extremo o *la referencia* del segmento.

  En este último grupo, únicamente el alumno (12) hace referencia a la infinitud del proceso de bisecciones, mediante la expresión *sucesivamente*. El resto de estudiantes no hacen alusión directa a esta cuestión.

3. Distinción entre teoría y práctica

(a) Únicamente el estudiante (11) de 4º de ESO distingue entre la dimensión teórica y práctica de la cuestión a tratar, mediante una explicación pseudoformal:

Creo que este problema se resolvería como un límite, por lo tanto el valor «∞» de este será B, aunque teóricamente éste nunca se podría alcanzar.

Comentarios destacables de la *Pregunta 1*

A nivel general se puede decir que se destacan dos grades argumentos por parte de los alumnos para presentar una posible solución a este problema: una argumentación numérica frente a una argumentación geométrica. La vertiente numérica esta basada en la concepción del segmento $\overline{AB}$ como un intervalo entre dos puntos, realizando la asociación de un punto del segmento con un punto numérico de la recta. En este contexto, algunos alumnos se expresan en términos de *números* o *decimales*; y este tipo de argumentación se da tanto en alumnos de carácter finitista como infinista. La segunta opción, la elección geométrica, se expresa en términos del propio proceso de biseccionar un segmento, obteniendo como resultado dos segmentos similares al primero de longitud mitad. Dentro de esta concepción geométrica podemos resaltar dos tipos de alumnos:

- Una primera categoría engloba a lo a los alumnos que aceptan la finitud o infinitud del proceso, y se basan en este hecho para argumentar sus respuestas. Por ejemplo:

  (413): *No, es imposible puesto que por mucho que dividamos el segmento nunca se llegará al punto B, puesto que las divisiones cada vez serán mucho más pequeñas; y al final las divisiones de los segmentos más pequeños no llegarán a B, pero estarán muy próximos a este punto, es decir, su límite será B,*

  donde se refleja un argumento plenamente potencial del infinito.

- Dentro de la argumentación, aparece un nuevo tipo de respuesta[2], respaldada por un colectivo numeroso de alumnos (2 alumnos de 3º de ESO y 6 de 4º de ESO) en la que el que el proceso de divisón sea finito o infinito no determina la respuesta a la pregunta, y tampoco es condicionante para resolverla.

  (321): *No se llegará al punto B porque con este punto siempre se hacen las bisecciones*.

  (404): *No, porque no puede haber un punto[3] $\overline{BB}$.*

  En ambas respuestas queda ejemplificado el punto a tratar. Los alumnos argumentan que el hecho de que B sea uno de los extremos del segmento a biseccionar es determinante, pues conciben como incompatible la posibilidad de que éste sea un punto de bisección y extremo a la vez. Las razones proporcionadas están altamente influenciadas por el lenguaje de representación geométrico, y ni siquiera se considera en ningún momento la incógnita de la infinitud del proceso.

Finalmente mencionar a modo de reseña que los alumnos de 3º de ESO manifiestan un mayor anclaje a la concepción numérica del problema.

4.1.2. Pregunta 2

Se debe mencionar que la *Pregunta 2* posee dos cuestiones explícitas a resolver:

[2]En otras investigaciones como (Fischbein y cols., 1979) se plantean cuatro categorías de respuestas: el proceso es finito, el proceso es infinito, el proceso termina pero en la teoría no, y no contesta. En cambio en este trabajo y en los estudios previos de S. Garbin (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002) aparece esta nueva categoría de respuesta.

[3]Aquí se interpreta que el alumno ha querido decir segmento, de otra manera la respuesta no tiene sentido en la propia construcción $\overline{BB}$.

(a) *¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.*

(b) *¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.*

Se ha creído conveniente analizar ambas preguntas de forma separada, duplicando así los elementos de análisis. A pesar de evaluarlas de forma separada, las agrupaciones obtenidas en base a las respuestas de los alumnos siguen el mismo patrón, obteniendo seis grupos distintos:

1. Los alumnos que respondieron afirmativamente, aquellos que indicaron que sí se puede calcular la distancia recorrida/número de rebotes y los calcularon.
2. Los alumnos que respondieron afirmativamente, sí se puede calcular la distancia recorrida/número de rebotes, pero no los determinaron explícitamente.
3. Los alumnos que respondieron negativamente, aquellos que afirmaron que no se puede determinar la distancia recorrida por la pelota/número de rebotes.
4. Los alumnos que distinguieron entre la teoría y la práctica.
5. Los alumnos que no respondieron a la pregunta explícitamente, pero describieron la situación.
6. Los alumnos que no respondieron a la pregunta o no contestaron explícitamente a lo que se les preguntaba.

El análisis del porcentaje de respuestas por apartado del alumnado se incluyen a continuación:

Grupo	**2(a)**		**2(b)**	
	Nº de resp.	**% de resp.**	**Nº de resp.**	**% de resp.**
1	3	16,67	4	22,22
2	9	50	12	66,67
3	2	11,11	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	4	22,22	2	11,11

TABLA 5: *Pregunta 2*. Porcentaje de respuestas del curso 3º de ESO

Y para el curso de 4º de ESO:

Grupo	**2(a)**		**2(b)**	
	Nº de resp.	**% de resp.**	**Nº de resp.**	**% de resp.**
1	2	11,11	1	5,56
2	12	66,67	14	77,78
3	4	22,22	1	5,56
4	0	0	1	5,56
5	0	0	1	5,56
6	0	0	0	0

TABLA 6: *Pregunta 2*. Porcentaje de respuestas del curso 4º de ESO

Las redes sistémicas asociadas a esta cuestión se pueden encontrar en el *Apéndice A*, A.1.2.

Comentarios destacables de la *Pregunta 2*

A nivel general se puede decir que se destacan tres tipos de argumentos por parte de los alumnos: argumentos numéricos, gráficos y geométricos. Destacar también la importancia el registro gráfico empleado por numerosos alumnos para ejemplificar el mencionado problema.

De cara al análisis de esta pregunta, únicamente reseñar la fuerte influencia de los estudiantes respecto a la contextualización del problema, siendo notables los comentarios respecto a las circunstancias físicas del ejercicio. Esto denota una clara orientación finitista. También mencionar la introducción de un lenguaje pseudo-formal por parte de los alumnos (406), (413) y (411) mediante el uso de límites, demostrando una clara orientación potencial por parte de los dos primeros y una tendencia actual por parte del último alumno.

4.1.3. Pregunta 3

En la tercera pregunta del cuestionario se esperaba agrupar a los alumnos en tres grupos distintos (los que afirmaran que la suma es convergente, que la suma es divergente, o que dieran otra respuesta). En cambio, tras leer y analizar las respuestas de los alumnos, la clasificación obtenida se torna considerablemente más complejas, proporcionando finalmente la siguiente distribución de grupos:

1. Los alumnos que afirman que el valor de la suma es infinito.

2. Los alumnos que afirman que el valor de la suma es finito.
3. Los alumnos que afirman que el valor de la suma tiende a 2.
4. Los alumnos que dan una respuesta cualitativa, aportan información sobre cómo determinar la suma, aunque no expliciten un valor para la misma.
5. Los alumnos que no respondieron a la pregunta, no aportan información directa sobre la suma, pero describen la situación.
6. Los alumnos que indican que se puede determinar, pero que desconocen cómo.
7. Los alumnos que no contestaron a la pregunta.

A continuación se adjuntan el análisis del porcentaje de respuestas por apartado del alumnado a la *Pregunta 3*, para cada curso:

Grupo	Número de respuestas	Porcentaje de respuestas
1	$7^{\dagger}$	38,89
2	2	11,11
3	$1^{\dagger}$	5,56
4	7	38,89
5	1	5,56
6	0	0
7	1	5,56

TABLA 7: *Pregunta 3*. Porcentaje de respuestas del curso 3º de ESO

Y para el curso de 4º de ESO:

Grupo	Número de respuestas	Porcentaje de respuestas
1	2	11,11
2	4	22,22
3	3	16,67
4	3	16,67
5	4	22,22
6	1	5,56
7	1	5,56

TABLA 8: *Pregunta 3*. Porcentaje de respuestas del curso 4º de ESO

†: Mencionar que en el grupo de 3º de la ESO, el estudiante (4) contempla la posibilidad de que el valor de la suma sea 2 ó ∞, con lo que se ha creído conveniente incluirlo en ambos grupos. Se analizará este caso más ampliamente en la sección de comentarios.

Se pueden consultar las redes sistémicas para esta pregunta en el *Apéndice A*, A.1.3.

4.1.4. Pregunta 4

Al igual que en el caso de la *Pregunta 2*, en esta cuestión también se plantea dos cuestiones explícitas a resolver:

(a) Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x.

(b) ¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace muy grande? Explica tu respuesta.

De nuevo, se ha creído conveniente analizar ambas preguntas de forma separada. En este caso, también se evaluará de forma diferente las clasificaciones de los alumnos en grupos producidas en ambas cuestiones:

Pregunta 4(a)

1. Los alumnos que plantean un comportamiento oscilatorio para la función.
2. Los alumnos evidencian un comportamiento asintótico lineal para la función.
3. Los alumnos que afirman que la función tiende a ∞.
4. Los alumnos que describen otros comportamientos y aportan alguna información sobre el tendencia de la función.
5. Los alumnos que no respondieron a la pregunta o no contestaron explícitamente a lo que se les preguntaba.

Pregunta 4(b)

1. Los alumnos que determinaban explícitamente el valor de la función.
2. Los alumnos que describen cualitativamente el comportamiento de la función.

3. Los alumnos que consideraron que sí se podía determinar el valor de la función para valores muy grandes de x, pero no aportan un valor explícito.

4. Los alumnos que consideraron que no se podía determinar el valor de la función para valores muy grandes de x.

5. Los alumnos que no respondieron a la pregunta o no contestaron explícitamente a lo que se les preguntaba.

A continuación se adjuntan el análisis del porcentaje de respuestas por apartado del alumnado a la *Pregunta 4*, para cada curso:

Grupo	**Número de respuestas**	**Porcentaje de respuestas**
1	5	27,78
2	3	16,67
3	0	0
4	3	16,67
5	7	38,89

TABLA 9: *Pregunta 4(a)*. Porcentaje de respuestas del curso 3º de ESO

Grupo	**Número de respuestas**	**Porcentaje de respuestas**
1	2	11,11
2	4	22,22
3	5	27,78
4	1	5,56
5	6	33,33

TABLA 10: *Pregunta 4(b)*. Porcentaje de respuestas del curso 3º de ESO

Y para el curso de 4º de ESO:

Grupo	**Número de respuestas**	**Porcentaje de respuestas**
1	1	5,56
2	3	16,67
3	2	11,11
4	7	38,89
5	5	27,78

TABLA 11: *Pregunta 4(a)*. Porcentaje de respuestas del curso 4º de ESO

Grupo	Número de respuestas	Porcentaje de respuestas
1	3	16,67
2	0	0
3	1	5,56
4	2	11,11
5	12	66,67

TABLA 12: *Pregunta 4(b)*. Porcentaje de respuestas del curso 4º de ESO

Se pueden consultar las redes sistémicas para esta pregunta en el *Apéndice A*, A.1.4.

Comentarios destacables de la *Pregunta 4*

Al igual que en la *Pregunta 2*, cabe destacar argumentaciones del tipo numérico, gráfico y geométrico por parte de los estudiantes. Destacar también la importancia el registro gráfico empleado por numerosos alumnos para ejemplificar el mencionado problema.

A continuación se debe hacer una breve reseña a las diferencias presentadas entre las clases de 3º de ESO y de 4º de ESO. La concepción de los alumnos de 3º de ESO es fundamentalmente finitista, analizando en gran medida el comportamiento de la función mediante un proceso oscilatorio (y en algunos casos asintóticamente lineal) sin llegar a extrapolar dicha tendencia. Además, algunos alumnos alegan que no entienden o encuentran sentido al problema planteado, lo que evidencia su sorpresa para este tipo de situaciones; y apenas hacen referencia a la finitud/infinitud del proceso descrito. En cambio, la reacción de los alumnos de 4º de ESO, a nivel más general, es ligeramente diferente. Parece ser que se han visto influidos por los conocimientos de análisis que poseían. Además, algunos alumnos se refieren al comportamiento de la función mediante un lenguaje formal y términología de límites.

4.1.5. Pregunta 5

En esta última pregunta del cuestionario se ha conseguido agrupar a los alumnos en los siguientes grupos:

1. Los alumnos que afirman que existe un valor de n y lo determinan.
2. Los alumnos que responden afirmativamente, que si existe un valor de n, pero que no lo determinan explícitamente.

3. Los alumnos que responden negativamente, afirmando que no existe un valor de n para que $y = 2$.

4. Los alumnos no responden a la pregunta explícitamente o no contestan. Pueden hacer alguna observación.

A continuación se adjuntan el análisis del porcentaje de respuestas por apartado del alumnado a la *Pregunta 5*, para cada curso:

Grupo	**Número de respuestas**	**Porcentaje de respuestas**
1	7	38,89
2	4	22,22
3	1	5,56
4	6	33,33

TABLA 13: *Pregunta 5*. Porcentaje de respuestas del curso 3º de ESO

Y para el curso de 4º de ESO:

Grupo	**Número de respuestas**	**Porcentaje de respuestas**
1	9	50
2	2	11,11
3	0	0
4	7	38,89

TABLA 14: *Pregunta 5*. Porcentaje de respuestas del curso 4º de ESO

Las redes sistémicas asociadas se encuentran en el *Apéndice A*, A.1.5.

4.2. Líneas de coherencia

En la sección anterior se han construido las redes sistémicas asociadas a cada pregunta, que actúan como un primer instrumento de organización y análisis de la información obtenida. Haciendo uso de estas redes sistémicas se va a implementar las líneas de coherencia generadas en el presente estudio, que permitirán clasificar y visualizar los esquemas de coherencia de los alumnos analizados.

El método de proceder para obtener las líneas de coherencia versa por la construcción de las tablas resumen, donde partiendo de la información proporcionada por las redes sistémicas, se reorganizan los datos en bloques independientes. La construcción de estas tablas y su forma de organización estará directamente orientada al establecimiento de las líneas de coherencia, con lo que, a pesar de que la información disponible es idéntica a la presente en las redes sistémicas, la mirada con la que se busca clasificar la misma es diferente. El análisis de las redes sistémicas es meramente descriptivo, mientras que las tablas resumen y las líneas de coherencia deben dar evidencias de las posibles líneas de pensamiento del alumnado respecto a la temática del infinito.

Al igual que en la sección anterior se presenta de las tablas resumen de la *Pregunta 1* como ejemplo detallado del proceder en la realización del presente trabajo. Para el resto de preguntas se ha actuado de la misma forma, realizando un estudio similar. La implementación de las tablas resumen se constituye como un paso intermedio en la construcción de las líneas de coherencia, y no aportan mayor información al estudio realizado, únicamente son una herramienta para reorganizar la información; por lo que se ha creído conveniente omitir en el *Apéndice* la inclusión de dichas tablas. Una vez explicado el procedimiento, se presentarán directamente los resultados obtenidos para las líneas de coherencia, para cada de los cursos involucrados.

4.2.1. Tablas resumen para la *Pregunta 1*

En estas tablas resumen se busca organizar a los alumnos por sus líneas de pensamiento y concepción de la infinitud. El análisis de la *Pregunta 1* se torna sencillo desde esta perspectiva, pues esencialmente se busca determinar, para los distintos casos considerados, si el alumno considera el proceso de bisección como finito o infinito. La premisa teórica resulta simple, pero la realidad es que prácticamente ningún alumno especifica explícitamente cuestiones relativas a la finitud del proceso de bisección, con lo que algunas de las respuestas deberán ser interpretadas. Por ejemplo, se tomará como ansatz considerar que los alumnos que aluden a un número grande de bisecciones consideran el proceso de bisección como infinito, a no ser que especifiquen lo contrario. En cambio, otro dato a resaltar es que, aunque no se hacer referencias concretas a la finitud del proceso de bisección, los alumnos sí hacen alusiones a la infinitud numérica. Además, las tablas resumen permiten tener en cuenta otros aspectos de las cuestiones que no se han podido reflejar en las redes sistémicas, y que pueden ser claves a la hora de estudiar la coherencia de los estudiantes.

A continuación, se presentan las tablas resumen asociadas a la *Pregunta 1* para cada uno de los cursos a considerar:

- Para 3º de ESO:

<table>
<tr><th colspan="4">Responde afirmativamente</th></tr>
<tr><td>El proceso de bisección es finito</td><td>El proceso (iterativo) de bisección es infinito</td><td>La respuesta alude a la infinitud</td><td>No especifica si el proceso es finito o infinito</td></tr>
<tr><td>6</td><td>17, 18</td><td>15</td><td>2, 5</td></tr>
</table>

TABLA 1

<table>
<tr><th colspan="5">Responde negativamente</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Infinitud del proceso de bisecciones</td><td colspan="2">El punto de bisección tiende a B</td><td colspan="2">B no puede ser punto de bisección</td></tr>
<tr><td>No especifica si el proceso es finito o infinito</td><td>Alude a la infinitud numérica</td><td>No especifica si el proceso es finito o infinito</td><td>Alude a la infinitud numérica</td></tr>
<tr><td>8</td><td>19</td><td>3, 10, 13, 14</td><td>9, 21</td><td>4, 7, 16</td></tr>
</table>

TABLA 2

Otros
No responde a la pregunta
1

TABLA 3

- Y para los alumnos de 4º de ESO:

<table>
<tr><th colspan="3">Responde afirmativamente</th></tr>
<tr><td>El proceso (iterativo) de bisección es infinito</td><td>Límite infinito</td><td>No especifica si el proceso es finito o infinito</td></tr>
<tr><td>1, 2, 7</td><td>6</td><td>3, 8</td></tr>
</table>

TABLA 4

<table>
<tr><th colspan="4">Responde negativamente</th></tr>
<tr><td rowspan="2">B como límite de las bisecciones</td><td colspan="2">El punto de bisección tiende a B</td><td>B no puede ser punto de bisección</td></tr>
<tr><td>No especifica si el proceso es finito o infinito</td><td>Alude a la infinitud numérica</td><td>No especifica si el proceso es finito o infinito</td></tr>
<tr><td>13</td><td>9, 10</td><td>5</td><td>4, 12, 15, 19, 20, 22</td></tr>
</table>

TABLA 5

Otros	
Distingue entre teoría y práctica (límite infinito)	No responde a la pregunta
11	14

TABLA 6

Tal y como se puede observar, la información recogida en las tablas anteriores es la misma que la asociada en las redes sistémicas, únicamente haciendo hincapié en la concepción de la infinitud de los estudiantes. Como comentario global cabe resaltar que, en general en este problema, los alumnos apenas hacen referencia directa a la cuestión de la infinitud del proceso, empleando fundamentalmente argumentos geométricos o numéricos, lo que ratifica las conclusiones anteriores obtenidas para esta pregunta.

Mencionar que se puede observar una notoria diferencia entre el alumnado de 3º de ESO y 4º de ESO. Los estudiantes de 3º de ESO emplean fundamentalente argumentos geométricos y se escudan frecuentemente en la infinitud de los números reales para alegar que la bisección no podrá coincidir con B. En cambio, esta faceta numérica no se halla tan presente en el alumnado de 4º, tomando como principal argumento la línea geométrica. Destacar que algunos alumnos de 4º (6, 11 y 13) mencionan explícitamente el término «infinito» en sus redacciones, procurando una respuesta pseudo-formal a la pregunta en cuestión.

4.2.2. Construcción de las líneas de coherencia

Una vez después de haber determinado todas las tablas resumen asociadas a cada una de las preguntas y por curso, se procede a construir las líneas de coherencia que se pueden establecer desde las respuestas de los alumnos. Mencionar que estudiar la coherencia de las respuestas no es tarea sencilla, pues los conceptos de finitud/infinitud se presentan en cada una de las cuestiones mediante diferentes registros, y las referencias a estos conceptos como tal pueden no estar claras en algunos casos. Por esto mismo, y otros aspectos a considerar, en (Garbin, 2000) se argumenta que en ocasiones no es fácil asignar «qué tipo de respuesta dada puede considerarse coherente». Por ello se quiere resaltar que el presente estudio pretende ser riguroso en la medida de sus posibilidades, intentando vislumbrar los esquemas de pensamiento de los estudiantes analizados que resulten coherentes entre sí.

Se han establecido un total de tres líneas de coherencias (para cada curso), diseñadas y estructuradas a partir de las tablas resumen. Si se sigue el orden dado por las flechas de los gráficos asociados se puede identificar fácilmente a los alumnos que no mantienen respuestas coherentes entre las cinco preguntas del cuestionario. Con el objetivo de establecer las distintas líneas de coherencia se analizarán los resultados obtenidos para las *Preguntas 1, 3, 2 ((a) y (b)), 4 y 5*, establecidas en ese orden.

Línea finitista

Se he establecido, tal y como su propio nombre indica, que las respuestas finitistas son aquellas que han sido desarrolladas en base a argumentos finitistas.

- La *Pregunta 1* tal vez sea la pregunta más clara desde el punto de vista del análisis que concierne. La respuesta finitista en este caso comprenderá a los alumnos que han respondido afirmativamente, afirmando que el punto de bisección coincide con B tras un proceso finito de bisecciones. Esta respuesta, alude directamente a la representación geométrica del problema al presentar un segmento finito. «La infinitud no se hace presente y la convergencia del punto de bisección con B es consecuencia de la finitud», (Garbin, 2000).
- En la *Pregunta 3* se halla de forma explícita el planteamiento de la noción de infinito en la propia representación numérica de la suma. Esta cuestión no da lugar a respuestas finitistas tan claras como la pregunta anterior. Se han considerado, siguiendo las directricces de (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005), dos tipos de alumnos en esta clasificación:
    1. Aquellos alumnos que evaden la infinitud de la suma considerando únicamente un número finito de términos de la misma, y determinan el resultado en cuestión como una suma ordinaria de fracciones.
    2. Los alumnos que especifican que la suma es infinito como consecuencia de la observación visual de la misma (estableciendo la analogía directa con la representación geométrica de la *Pregunta 1*) y notificación de su divergencia.
- De cara al análisis de la *Pregunta 2*, en la línea finitista se englobará a los alumnos que mantienen respuestas contextualizadas respecto al mundo real, «atados» a las circunstancias físicas del problema, que dificultan o permiten evadir la percepción de la infinitud. También se incluyen a los alumnos que son incapaces de proporcionar una respuesta por falta de datos, o que proponen una relación directa entre la distancia recorrida y el número de rebotes. Además, en este grupo entrarían el grupo de alumnos que dan una respuesta numérica finita derivada de considerar únicamente un conjunto parcial de las alturas/rebotes a considerar.

- La concepción finitista en la *Pregunta 4* tendrá lugar al considerar «la finitud del poceso si la mirada hacia la gráfica se hace en el sentido de la medición» u «observando puntualmente el comportamiento de la función, la concepción de la función como correspondecia entre variables», (Garbin, 2000). Se considerarán respuestas finitistas aquellas que aludan al proceso como finito.
- La *Pregunta 5* es similar a la *Pregunta 3* en su formulación, pues lleva explícita la infinitud en su planteamiento. Al igual que entonces, nos fijaremos en dos tipos de alumnos para la implementación de esta línea:
    1. Aquellos alumnos que evadan la infinitud de la suma considerando únicamente un número finito de términos, proporcionando un valor finito de n.
    2. Los alumnos que especifiquen que el que la suma posea infinitos términos dificulta o impide la determinación del valor de n.

Línea actual

En este apartado se recogerá una línea de pensamiento actualista, donde la noción imperante en las respuestas observadas verse por una concepción actual del infinito.

- En la *Pregunta 1* se considera la respuesta de que el punto de bisección alcanzará a B tras un proceso infinito de bisecciones. En esta respuesta el alumno integra varios procesos de pensamiento matemático tales como que el número de divisiones aumenta («divergencia») o es infinita («cardinalidad») mientras que la medida de los segmentos disminuye («convergencia») en relación al «espacio», (Garbin, 2000).
- La respuesta coherente de la *Pregunta 3* asociada a la anterior se consigue al considerar a los estudiantes que afirmaron que la suma tiende a 2 (o a 0 en su caso)[4].
- De cara al análisis de la *Pregunta 2*, se buscarán líneas de pensamiento entre los alumnos, considerando como válidos los siguientes argumentos:
    - Un resultado finito para la distancia aludiendo a la infinitud del proceso.
    - Un resultado cualitativo aludiendo a la infinitud del proceso.

[4]Este caso debe tenerse en cuenta a pesar de que sea incorrecto. Los alumnos estudiaron los términos de la suma por separado $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\}$ construyendo la sucesión geométrica asociada y observando que tiende a 0. Aunque la respuesta no sea correcta, la línea de pensamiento seguida es similar, con lo que se ha creído conveniente incluirla en este apartado.

- Un resultado infinito para el número de rebotes.
- Un resultado cualitativo para el número de rebotes aludiendo a la infinitud del proceso.

- En la *Pregunta 4* se considerarán respuestas actualistas aquellas que aludan a la infinitud, o que la función tendrá un comportamiento asintótico horizontal, tendiendo a 2, al eje x o a 0[5].
- Las respuestas coherentes en esta línea asociadas a la *Pregunta 5* son aquellas que aludan al proceso como infinito, n tendiendo a ∞ para que $y = 2$.

Línea potencial

La tercera y última línea de coherencia es aquella que presenta un perfil de respuestas potenciales que reflejen una concepción potencial del infinito.

- La respuesta de la *Pregunta 1* asociada a la línea potencial es aquella en la que se considera que el punto de bisección no coincide con B, por la infinitud del propio proceso, pero que tiene a él. Concibe el proceso como infinito pero éste no es completo. De acuerdo con (Garbin, 2000), «esta respuesta induce a pensar que el alumno consideró la divergencia, la cardinalidad y el espacio, pero no la convergencia».
- Las respuestas de la *Pregunta 3* asociadas son aquellas en las que se plasman evidencias de que el proceso es infinito pero no completo, es decir, no se concretiza la convergencia de la serie.
- En la *Pregunta 2*, en la línea potencial se englobará a los alumnos que hagan referencia a la infinitud del problema.
- La concepción potencial en la *Pregunta 4* tendrá lugar al considerar respuestas que aludan a la infinitud del proceso obteniendo un resultado final finito, pero sin plasmar el fenómeno de convergencia.
- La *Pregunta 5* seguirá una línea argumental similar a las respuestas proporcionadas en las *Preguntas 3 y 4*.

Y a continuación se adjuntan los esquemas obtenidos para las distintas líneas de coherencia:

[5] De nuevo, incurrimos en un segundo caso donde, a pesar de que la respuesta numérica como tal no es correcta, la línea de pensamiento es coherente.

Pregunta 1
Responde afirmativamente
El proceso de bisección es finito
6

↓

Pregunta 3			
Respuesta cuantitativa		**Respuesta cualitativa**	
Resultado finito (suma finita de fracciones)	El valor de la suma es ∞ (infinitud de términos)	Alude a la finitud	Alude a la infinitud
15, 19	4, 6, 8, 14, 16 18, 21	1, 3	2, 17

↓

Pregunta 2(a)			
Responde afirmativamente			
Calcula la distancia	No calcula la distancia		
Resultado finito	Suma finita de alturas	División entre 2, proceso finito	Datos/condiciones físicas del problema
5, 6	18, 21	3, 4	7
Responde negativamente			
En función del recorrido de la pelota			
9, 10			

Pregunta 2(b)				
Responde afirmativamente				
Calcula el nº de rebotes	No calcula el número de rebotes			
Resultado finito	Nº finito de rebotes. La pelota se para	División entre 2, proceso finito	Datos/cond. físicas del problema	En función de la distancia
2, 6, 16	9, 10, 13, 15, 21	4,5	1, 3, 7, 18, 19	8, 14

↓

Pregunta 4		
Comportamiento oscilatorio	**Otros comportamientos**	**En función de otros datos**
14, 15, 17, 21	16	7, 13

↓

Pregunta 5		
Respuesta cuantitativa	**Respuesta cualitativa**	
n es un valor finito	Alude a la finitud	Alude a la infinitud
3, 4, 5, 10, 15, 17, 21	13, 14	1, 8

FIGURA 3: *Línea finitista* para el curso 3º de ESO

Pregunta 1
Responde afirmativamente
El proceso de bisección es finito
-

↓

Pregunta 3		
Respuesta cuantitativa		**Respuesta cualitativa**
Resultado finito (fracción)	El valor de la suma es ∞ (infinitud de términos)	Alude a la infinitud
2, 3, 15, 20	1, 7	6, 8, 9, 14

↓

Pregunta 2(a)			
Responde afirmativamente			**Responde negativamente**
No calcula la distancia			
División entre 2, proceso infinito	En función del nº de rebotes	Datos/condiciones físicas del problema	Datos/condiciones físicas del problema
5, 20	2, 14	7, 12	1, 15

Pregunta 2(b)			
Responde afirmativamente			
Calcula el nº de rebotes	No calcula el número de rebotes		
Resultado finito	Nº finito de rebotes. La pelota se para	Datos/cond. físicas del problema	En función de la distancia
14	5, 13	7, 12	2
Responde afirmativamente	**Responde negativamente**		
Hace referencia a ∞ rebotes	Sin explicación	Datos/cond. físicas del problema	
3, 4, 8, 9	22, 15	1, 10	

↓

Pregunta 4		
Comportamiento oscilatorio	Otros comportamientos	La función tiende a infinito
5	3, 8, 12, 15, 19, 20	1, 10

↓

Pregunta 5
Respuesta cuantitativa
n es un valor finito
10, 14, 20

FIGURA 4: *Línea finitista* para el curso 4º de ESO

Pregunta 1		
Responde afirmativamente		
El proceso de bisección es infinito	La respuesta alude a la infinitud	No especifica si el proceso es finito o infinito, pero alude a un proceso iterativo
17, 18	15	2, 5

↓

Pregunta 3	
Respuesta cuantitativa	**Respuesta cualitativa**
El valor de la suma es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$=2	Es una serie geométrica convergente
-	-

↓

Pregunta 2(a)
Una ditancia finita, el proceso es infinito
-

Pregunta 2(b)
Nº de rebotes infinito, el proceso es infinito
-

↓

Pregunta 4
El valor de la función es 2, 0 ó el eje x
-

↓

Pregunta 5	
Respuesta cuantitativa	**Respuesta cualitativa**
-	-

FIGURA 5: *Línea actual* para el curso 3º de ESO

Pregunta 1		
Responde afirmativamente		
El proceso (iterativo) de bisección es infinito	Límite infinito	No especifica si el proceso es finito o infinito, pero alude a un proceso iterativo
1, 2, 7	6	3, 8

↓

Pregunta 3
El valor de la suma es 2
11

↓

Pregunta 2(a)
Distancia finita como límite de la suma de todas las alturas, el proceso es infinito
11

Pregunta 2(b)
N° de rebotes infinito, el proceso es infinito
-

↓

Pregunta 4
El valor de la función es 2, 0 ó el eje x
6, 11

↓

Pregunta 5
Respuesta cuantitativa
n es infinito, la suma o $y = 2$
1, 2, 9, 13

FIGURA 6: *Línea actual* para el curso 4° de ESO

Pregunta 1			
Responde negativamente			
Infinitud del proceso de bisecciones	El punto de bisección tiende a B		B no puede ser punto de bisección
	No especifica si el proceso es finito o infinito	Alude a la infinitud numérica	Alude a la infinitud numérica
8	19	3, 10, 13, 14	4, 7, 16

↓

Pregunta 3
Es una serie geométrica que tiende a un número finito, pero no alcanza dicho número -

↓

Pregunta 2(a)
Tiende a una distancia finita, el proceso es infinito -

Pregunta 2(b)
El proceso es infinito, no se sabe cuántos rebotes puede dar la pelota 6

↓

Pregunta 4	
Comportamiento asintótico lineal 10, 18	La función tiende a 2, 0 ó el eje x 4

↓

Pregunta 5
La suma tiende a 2, no se puede determinar n, la suma nunca llegará a 2... -

FIGURA 7: *Línea potencial* para el curso 3º de ESO

Pregunta 1			
Responde negativamente			
B como límite de las bisecciones	Límite infinito pero no se alcanza B	El punto de bisección tiende a B. Alude a un proceso iterativo	B no puede ser punto de bisección. Alude a la infinitud numérica
13	11	9, 10	5

↓

Pregunta 3	
Respuesta cuantitativa	**Respuesta cualitativa**
La suma tiende a 2, pero nunca alcanzará ese valor 5, 13	Alude a la infinitud de la suma y se interpreta que el resultado final es finito 10

↓

Pregunta 2(a)
Tiende a una distancia finita (4), el proceso es infinito 6, 13

Pregunta 2(b)
El proceso es infinito -

↓

Pregunta 4		
Comportamiento asintótico lineal 2	La función tiende a 2, 0 ó el eje x 13	Proceso infinito, no se puede determinar el valor exacto 9

↓

Pregunta 5	
No se puede determinar n. La suma no llegará a 2 6, 8	n es infinito pero y nunca alcanzará el valor de 2 11

FIGURA 8: *Línea potencial* para el curso 4º de ESO

A modo de breves observaciones al trabajo recién realizado se ha de mencionar que en las líneas de coherencia anteriores no aparecen las siguientes respuestas expresadas por los alumnos, dada su dificultad en su clasificación o bien que no se ajustan a ninguna de las categorías establecidas:

- *No contesta a la pregunta*. En esta categoría se incluyen a los alumnos que no responde a la pregunta, no contestan explícitamente a lo que se les pregunta, o habiendo contestado, no entienden el enunciado de la misma. Estos alumnos pueden tener cualquier tipo de respuestas en las preguntas restantes.

- En la *Pregunta 1* un total de 2 alumnos de 3º de ESO (9, 21) y 6 alumnos de 4º de ESO (4, 12, 15, 19, 20, 22) argumentan que *el punto B no puede ser un punto de bisección pues constituye el extremo del propio segmento a bisecar*. Esta respuesta no ha sido obtenida bajo un análisis de la finitud/infinitud del problema, sino por un obstáculo plenamente cognitivo, donde B no puede ser un punto de bisección por argumentos puramente geométricos. Los alumnos pueden presentar respuestas en cualquiera de las líneas de coherencias presentadas.

- En las *Preguntas 2, 3, 4 y 5* hay un grupo de alumnos significativo[6] que describe los problemas presentados como *series o progresiones (geométricas, fórmulas), pero en ningún momento se especifica, ni explícitamente ni interpretativamente, si el resultado de la misma es finito o infinito*. Ante la imposibilidad de clasificar estas respuestas en alguna de las líneas de coherencia se ha creído conveniente excluirlas del análisis.

- Se distingue entre la teoría y la práctica, entre los argumentos matemáticos pseudoformales y argumentos empíricos.

Mencionar que en el *Apéndice A*, sección A.2 se incluyen las tablas resumen asociadas a estas respuestas excluidas, catalogadas por tipo de respuesta y por curso.

Realizando un análisis breve acerca de los resultados obtenidos, es interesante comparar el perfil de los patrones de pensamiento de las respuestas de los estudiantes por curso y por pregunta, obteniendo la siguiente tabla:

[6] *Pregunta 2*: 301, 313, 314, 315, 316, 319, 402, 403, 404, 408, 419, 420, 422; *Pregunta 3*: 307, 310, 313, 404, 412, 422; *Pregunta 4*: 301, 303; *Pregunta 5*: 307, 412, 419

	3º ESO			4º ESO		
Pregunta	**Línea 1**	**Línea 2**	**Línea 3**	**Línea 1**	**Línea 2**	**Línea 3**
Pregunta 1	1	3	9	0	5	5
Pregunta 2(a)	7	0	0	8	1	2
Pregunta 2(b)	17	0	0	15	0	0
Pregunta 3	13	0	0	10	1	3
Pregunta 4	7	0	3	9	2	3
Pregunta 5	11	0	0	3	4	3

TABLA 7: Relación entre las respuestas de los alumnos alumnos por línea de coherencia y pregunta

donde la **Línea 1** hace referencia a la línea finitista; la **Línea 2** se corresponde con la línea actual y la **Línea 3**, con la línea potencial.

Cabe mencionar, como comportamiento generalizado para ambos cursos, que el número de respuestas finitistas que aportan los alumnos es considerablemente mayor que el número de respuestas que podríamos encuadrar en la línea potencial, y mucho menos para la línea actual. Esta tendencia se mantiene estable para las *Preguntas 2(b)-5*, donde la disposición de resultados es más o menos homogénea. También se puede observar que la cuestión con menor índice de respuesta es la *Pregunta 2(a)*. En cambio, cabe destacar el caso anómalo de la *Pregunta 1*, donde los resultados anteriores se invierten, y la línea finitista queda prácticamente abandonada por parte del alumnado, cobrando importancia la línea potencial para 3º de E.S.O. y la línea potencial-actual para 4º de E.S.O. Este fenómeno debe estar ligado íntimamente al lenguaje de representación empleado en la pregunta, que alude a un fuerte componente geométrico. Este hecho viene siendo palpable desde las secciones anteriores, y se comentará en profundidad más adelante.

Finalmente destacar que se pueden apreciar comportamientos ligeramente diferentes para los alumnos de 3º y 4º de la E.S.O. El primer grupo de alumnos presenta una alta concepción finitista, únicamente descartable en el contexto geométrico. Esto indica, entre otras cosas, estos alumnos se hallan fuertemente atados a la contextualización del problema que se presente. En cambio, para los estudiantes de 4º de E.S.O, aunque en general también muestran elevadas directrices finitistas, el porcentaje de alumnos que se halla en las concepciones potencial y actual aumenta, siendo bastante similar para estas dos concepciones, haciéndose independiente del lenguaje de representación. Entonces, como una posible explicación a este hecho, se considera que ésta resida en la educación matemática de los propios estudiantes, siendo vital para este caso el conocimiento y dominio del análisis, y más concretamente, de los límites.

4.2.3. Categorización de los estudiantes por las líneas de coherencia

En esta sección se busca categorizar a los estudiantes a partir de las líneas de coherencia construidas. Para ello se busca estudiar la progresión de las respuestas de los distintos alumnos a lo largo del cuestionario (que consta de 5 preguntas, pero dado que la *Pregunta 2* se ha estudiado de forma duplicada (2(a) y 2(b)) contabilizarán como dos elementos de estudio, proporcionando un total de 6 respuestas por alumno). Las respuestas coherentes determinarán la clasificación, siguiendo las pautas descritas a continuación, basadas en (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005):

- Si el alumno posee tres o más respuestas coherentes de una línea determinada, se le asignará a la categoría asociada.
- Si un estudiante posee tres respuestas en una línea de coherencia, y las otras tres restantes en otra línea distinta, entonces se le situará en una nueva categoría, compartida por ambas líneas.
- Si un alumno posee dos o más respuestas situadas en diferentes líneas (que no entre en conflicto con la proporsión anterior) se le ubicará en una nueva categoría denominada categoría mixta.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se han obtenido los siguientes resultados, donde se representa el número de estudiantes obtenido por cada una de las categorías analizadas. Mencionar que se analizará de manera separada, tal y como viene siendo usual, los cursos de 3º y 4º de la ESO:

	3º ESO		4º ESO	
Líneas de coherencia	Nº. alumnos	% alumnos	Nº. alumnos	% alumnos
Línea finitista (Línea 1)	18	100	14	77,78
Línea actual (Línea 2)	0	0	1	5,56
Línea potencial (Línea 3)	0	0	2	11,11
Línea finitista-potencial (Línea 13)	0	0	1	5,56

TABLA 8: Clasificación de los estudiantes en las líneas de coherencia

obteniendo en ambos casos un total de 4 grupos según las respuestas coherentes (líneas de coherencia) de los estudiantes.

En base a las pautas de análisis propuestas se han conseguido identificar 4 categorías según sus respuestas coherentes, donde 3 de ellas (1, 2 y 3) se corresponden con las líneas de pensamiento previamente definidas, habiendo introducido una categoría mixta, como producto de las líneas de coherencias 1 y 3, denominada *Línea 1-3* o *Línea finitista-potencial*. En base a la tabla anterior, merece la pena señalar el asombroso hecho de que absolutamente todo el alumnado de 3º de ESO pertence a la *Categoría 1*, que evidencia la línea de pensamiento finitista. En el curso de 4º de ESO casi un 80 % de los participantes están incluidos en la primera categoría, y el resto de estudiantes se ubican de forma más o menos equilibrada en las categorías restantes. Como una primera conclusión, se puede establecer que la mayoría de los estudiantes analizados poseen una fuerte concepción finitista, estando ésta más arraigada en los alumnos más jóvenes. Haciendo referencia a los contenidos previos del alumnado, se puede aventurar que el estudio del análisis matemático y la introducción de las nociones formales de límites puede contribuir a fomentar otras concepciones potenciales y actuales del infinito en nuestros alumnos.

4.3. Incoherencias e inconsistencias

Tal y como se destacó en el marco teórico, el concepto de *inconsistencia* constituye un elemento fundamental en esta última parte del desarrollo del trabajo. Según (Garbin, 2000), «cuando se habla de una idea o un pensamiento inconsistente es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada». Estas inconsistencias suelen aparecer durante la resolución de un problema matemático o en la búsqueda de la respuesta del mismo. Numerosas son la literatura y las investigaciones acerca del tópico de las inconsistencias, (Tirosh, 1990); pero más concretamente se está interesado en analizar las inconsistencias producidas en los alumnos al resolver un mismo problema representado por lenguajes matemáticos diferentes, (Tirosh y Tsamir, 1996; Tsamir y Tirosh, 1999). En esta situación se podrán generar respuestas inconsistentes entre sí, siendo alguna de las respuestas consistente con el concepto para un determinado tipo de representación e inconsistente para el resto.

Volviendo la vista hacia el cuestionario implementado en el presente estudio, ésta es justo la situación problemática a tratar, en el que se han empleado diferentes registros de representación para un mismo tópico de base. En este contexto, en el que a un estudiante se le plantea resolver un problema expresado de diversas formas (matemáticamente hablando), Garbin (2000) introduce el nuevo concepto de *incoherencia*, con un matiz distinto al de *inconsistencia* aunque estrechamente relacionado, con el que busca denotar las respuestas contradictorias entre sí; o *coherentes* en caso contrario. Esta definición permite distinguir y trabajar de forma simultánea con los conceptos de «incoherencia» e «inconsistencia», relegando el término de «inconsistencia» al propio objeto matemático involucrado en el estudio.

Mediante el establecimiento de las líneas de coherencia se puede determinar la noción de *alumno coherente* o *incoherente* con su propio pensamiento, más allá del mero análisis de la legitimación de sus respuestas a los problemas planteados. Con todo ello, se definen tres tipologías de alumnos, (Garbin y Azcárate, 2000; Garbin, 2000):

1. *Alumno coherente y consistente*: es el estudiante que presenta todas sus respuestas en la misma línea de coherencia («coherente»), en la categoría 2 o línea actual («consistente»).
2. *Alumno coherente pero inconsistente*: presenta todas sus respuestas en la misma línea de coherencia («coherente»), en las líneas 1 (finitista) o 3 (potencial) («inconsistente»).
3. *Alumno incoherente*: es aquel que posee respuestas que no son coherentes en alguna línea de pensamiento, es decir, que posee varias respuestas en líneas diferentes.

Atendiendo a esta clasificación, podemos categorizar a los estudiantes y analizar el grado de incoherencia/inconsistencia de sus respuestas. Se ha de resaltar dos aspectos fundamentales respecto a este proceso:

- La incoherencia patente en el alumnado no es una noción absoluta, sino que cada alumno puede poseer un grado de incoherencia diferente. «No todos los alumnos incoherentes lo son de la misma manera», (Garbin y Azcárate, 2002)
- En la categorización de los alumnos en base a las líneas de coherencia, se han excluido algunas de las respuestas de los alumnos que no se han tenido en cuenta para el análisis, con lo que hablar de la «totalidad de respuestas» parece una sentencia demasiado fuerte, que se sustituirá por el análogo «totalidad de respuestas categorizables dentro de las líneas de coherencia».

A continuación se presenta las siguientes tablas donde se recogen los resultados obtenidos del análisis que compete en función de las incoherencias e inconsistencias de los alumnos, por líneas de coherencia y por curso:

- Para 3º de ESO:

3º ESO (Línea 1, 18 alumnos)	
Tipo de alumno	Número de alumnos
Alumno coherente y consistente	0
Alumno coherente pero inconsistente	4
Alumno incoherente	12

TABLA 1: Incoherencias e inconsistencias para los alumnos de 3º de ESO

Cabe resaltar que la totalidad del grupo de 3º de ESO se halla en la primera línea de coherencia, la línea finistista, con lo que, por definición, estos no podrán ser consistentes. De los 18 alumnos analizados, 4 de ellos (1, 6, 9, 21) se engloban en la categoría de *coherentes pero inconsistentes*, presentando todas sus respuestas dentro del pensamiento finitista. De los 14 alumnos restantes, considerados como *alumnos incoherentes*, 5 de ellos (2, 5, 15, 17, 18) presentan una respuesta de carácter actual, mientras que los otros 9 presentan alguna cuestión dentro de la concepción potencial (3, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 16 y 19). Tal y como se ha mencionado, el grado de incoherenca de los alumnos no es uniforme, pues los alumnos (4 y 10) presentan dos respuestas de caráceter potencial en el cómputo final mientras que el resto de alumnos incoherentes únicamente presenta una respuesta en alguna de las líneas 2 ó 3, según se corresponda.

En general, la respuestas de carácter actualista en el grupo de 3º de ESO son escasas, dando lugar a un número ligeramente superior de respuestas potenciales. Esto parece indicar que el contexto y los registros de representación semiótica tienden a reafirmar una posición finitista, o que evade la infinitud, o una concepcion potencialista, siendo ésta la intuición natural de infinito. Tal y como ya se ha mencionado, este hecho también puede estar relacionado con la educación matemática recibida por parte del alumnado hasta el momento.

- Para 4º de ESO:

	4º ESO			
Tipo de alumno	Línea 1, 14 alumnos	Línea 2, 1 alumno	Línea 3, 2 alumnos	Línea 1-3, 1 alumno
Alumno coherente y consistente	0	0	0	0
Alumno coherente pero inconsistente	7	0	0	0
Alumno incoherente	7	1	2	1

TABLA 2: Incoherencias e inconsistencias para los alumnos de 4º de ESO

Mencionar que la distribución de alumnos en 4º de ESO es notablemente diferente al panorama observado en 3º, apareciendo los primeros alumnos con esquemas de pensamiento puramente actuales o potenciales.

De los 18 alumnos analizados, 14 de ellos se hallan en una línea de pensamiento finitista, de los cuales 7 (12, 14, 15, 19, 20 y 22) se clasifican como alumnos *coherentes pero inconsistentes* y los 7 restantes (1, 2, 3, 5, 7, 8 y 10) como *incoherentes*. De nuevo cabe señalar que el grado de incoherencia manifestado por los alumnos no es homogéneo, pues los grupos de alumnos (3, 7) y (1, 2) presentan una y dos respuestas actuales, respectivamente; mientras que (5, 10) presentan dos respuestas potenciales y (2,8) presentan respuestas variadas en las dos líneas actual y finitista. En este primer grupo analizado se evidencia una mayor presencia de las respuestas actuales, aunque no sean muy numerosas, derivadas fundamentalmente de la sensibilidad al registro de representación empleado.

El alumno (11), categorizado con una línea de coherencia actual, se manifiesta como un *alumno incoherente*, poyesendo dos de sus respuestas en el ámbito potencial y tres de ellas en el actual. Este alumno se presenta como el más actualista de todos los analizados, aunque también presenta una clara inclinación potencial. Se puede decir que este estudiante ha superado completamente la concepción finitista, moviéndose en las concepciones actual-potencial, aunque su nivel de desarrollo no es todavía el suficiente para ubicarlo plenamente dentro del grupo actualista. No obstante, este alumno representa, junto con los estudiantes (6 y 13) uno de los casos más interesantes de estudio de todos los alumnos evaluados.

Los alumnos (6 y 13) se encuentran categorizados en un esquema de pensamiento potencial, donde ambos presentan una respuesta finitista, y dos y una respuestas actuales, respectivamente. Ambos alumnos se presentan como *incoherentes* al concebir varias respuestas en las distintas líneas de coherencia. Aunque su orientación es fundamentalmente potencial, se puede observar que destacan por poseer un elevado número de respuestas actuales. Al igual que en el caso anterior, estos alumnos han superado parcialmente la concepción finitista para ubicarse dentro de una concepción potencial, con indicios actuales. Resaltar que estos alumnos resultan bastante sensibles al registro de representación empleado, sobre todo en lo que al problema contextualizado se refiere.

Finalmente, el alumno (9) se halla en la categoría 1-3, con dos respuestas en cada línea (finitista y potencia) y una única respuesta en la línea actual. Este alumno se constituye como uno de los máximos representantes de la incoherencia, y es especialmente sensible al lenguaje de representación empleado en cada caso.

4.4. Análisis del lenguaje de representación

Mediante la construcción de las redes sistémicas y las líneas de coherencia se han podido vislumbrar los esquemas conceptuales de los alumnos acerca del tópico del infinito actual, partiendo de las distintas respuestas aportadas, que han permitido evidenciar los pequeños detalles sobre la concepción de este concepto (presencia de ciertos obstáculos cognitivos (*Pregunta 1*), inconsistencias,...). Se ha podido observar a lo largo de la presente redacción que parte de las respuestas, junto con los argumentos que se esconden detrás, están influenciados por el lenguaje empleado en la descripción del problema, es decir, son sensibles a los registros de representación empleados en cada caso. Según (Garbin, 2000) «el lenguaje es el medio para acceder a los objetos matemáticos, más aún es el vehículo que usan los matemáticos para transmitir y hacer reales estos objetos». Mediante esta reflexión queda presente la importancia del lenguaje en la expresión matemática; y la necesidad como tal de construir y emplear un lenguaje matemático adecuado, mediante el uso de las representaciones semióticas apropiadas para representar el objeto en cuestión. Pero como toda construcción humana, la lingüística no está exenta de limitaciones, y es por ello que, teniendo en cuenta la presencia de las mismas, se debe hacer énfasis en desarrollar un lenguaje preciso y adecuado que permita acercarse a los objetos matemáticos de estudio.

En relación a esta línea argumentativa, en (Garbin, 2000) se especifica:

«En el caso del infinito actual, cada representación resulta ser cotraintuitiva con respecto a la intuición natural, que es la potencial. Cada registro de representación semiótica alude, incide, fomenta, convence, permite que surjan en la mente del estudiante, concepciones, elementos y experiencias matemáticas específicas».

Una vez justificada la importancia del lenguaje en el ámbito matemático, se procede a analizar brevemente los registros de representación empleados por algunos de los alumnos, y la relación entre ellos. Parte de los elementos aquí analizados ya han sido previamente mencionados en apartados anteriores.

Pregunta 1

- Considerar el segmento como un elemento finito (desde la perspectiva de la medida), dando lugar un proceso de bisección finito.
- Se puede considerar el segmento $\overline{AB}$ como un conjunto infinito de puntos, lo que alude a la infinitud del proceso. Aunque esta percepción no condiciona el hecho de que el punto de la bisección pueda coincidir con B.

- La concepción del segmento desde una perspectiva geométrica puede conducir a dos vertientes diferenciadas, la primera de ellas conduce a la consideración de los segmentos derivados de la bisección como elementos geométricos, que puede dar lugar a procesos finitos o infinitos; y la segunda de ellas, en la que no se tiene en cuenta el proceso infinito de bisección y se argumenta mediante elementos exclusivamente geométricos.

Pregunta 2

- Se puede establecer la analogía entre el ejercicio matemático teórico y el problema real contextualizado, sujeto al mundo físico. Los alumnos con frecuencia se ven influenciados por su experiencia y familiaridad con esta situación, lo que les confiere una actitud finitista frente a esta cuestión, donde no hay cabida para la infinitud.
- Los alumnos también implementan nuevos registros de representación, tales como las gráficas o dibujos, recorrido de la pelota... que les ayudan pero también condicionan a ejemplificar y describir la situación planteada. La finitud o infinitud del propio proceso dependerá de la representación empleada; así como su orientación.
- Algunos alumnos hacen referencia a la formulación formal con límites del problema, lo que indica una concepción actual-potencial ante dicha situación.

Pregunta 3

- Algunos alumnos consiguen evadir la infinitud de la suma planteada considerando una suma parcial de fracciones hasta un término adecuado.
- La suma planteada es infinita, debido a que posee infinitos términos.
- Algunos alumnos caracterizan la suma como serie o progresión, describiendo verbalmente, en la mayoría de los casos, la tendencia de la progresión geométrica, sin especificar explícitamente la finitud o infinitud de la misma.
- Un selecto grupo de alumnos de 4º de ESO consideran la convergencia de la serie a un valor finito, con una concepción fundamentalmente potencial del mismo.

Pregunta 4

- Los alumnos destacan un comportamiento oscilatorio o fluctuante de la función, influenciados por el registro gráfico de representación.

- Otra opción versa por caracterizar el comportamiento de la función como asintóticamente lineal, considerando la función como una curva geométrica o a través de un proceso numérico.
- Los alumnos confunden la recta $y = 2$ con el eje x o $y = 0$, aunque las líneas de pensamiento subyacentes sean coherentes.

Pregunta 5

- De nuevo, los alumnos buscan evadir la infinitud de la ecuación planteada considerando una suma parcial de fracciones hasta un determinado término, o aislando únicamente el término n-ésimo de la serie.
- La ecuación planteada es infinita, debido a que posee infinitos términos.
- Algunos alumnos caracterizan la ecuación como serie o progresión, sin especificar explícitamente la finitud o infinitud de la misma.
- La suma tiende a 2 para n infinito.
- A pesar de la íntima relación que guarda esta cuestión con la *Pregunta 3*, un número significativo de alumnos manifiestan no entender la pregunta, aún habiendo respondido a la pregunta anterior.

En las líneas anteriores se puede observar un resumen rápido de las principales argumentaciones realizadas por los alumnos en los distintos casos. Se puede apreciar, que a pesar de estar describiendo el mismo problema, los esquemas desarrollados son muy diferentes; y únicamente un grupo destacado de alumnos ha sido capaz de identificar una posible relación entre los distintos enuciados. Además, volviendo al análisis de los resultados derivados del establecimiento de las líneas de coherencia, gran parte de los alumnos han sido categorizados dentro de la línea de pensamiento finitista, que generalmente está íntimamente ligada al lenguaje empleado. Con todo ello, únicamente se desea hacer notar la gran importancia que posee el registro de representación y su influencia en la sensibilidad del pensamiento y esquemas conceptuales de nuestros alumnos.

4.5. Breve análisis comparativo

Finalmente, como colofón a este capítulo, se desea realizar una breve comparación entre los dos grupos clase estudiados en la presente investigación.

A nivel general, los alumnos de 3º de ESO poseen una concepción fundamentalmente finitista de cara a la resolución de los problemas, aunque se pueden apreciar algunas concepciones esporádicas relativas al infinito potencial y actual.

En cambio, en 4º de ESO el perfil es ligeramente diferente. Aunque la mayoría de los alumnos presente un carácter finitista (casi un 80 %) se pueden apreciar con mayor frecuencia respuestas potenciales y actuales; hasta tal punto que 3 de los alumnos se pueden categorizar como plenamente no finitistas, aunque los resultados posteriores corroboren que no son del todo coherentes en su línea de pensamiento.

Las diferencias encontradas se pueden explicar aludiendo a un factor fundamental: *la educación matemática recibida*, evidenciada principalmente por la brecha presente en los conocimientos de base del alumnado. Esto nos permite concluir que la educación matemática en materia de análisis, y más concretamente, en la formación de la teoría de funciones y límites, puede ser el mecanismo que regule la transición entre un concepción plenamente finitista a un esquema en principio potencial (ya que constituye la noción más natural del infinito), y que conduce a una visión actualista del infinito.

Capítulo 5

Conclusiones

Finalmente, en este último capítulo de la memoria, se presentan las conclusiones obtenidas, de forma detallada y compacta, derivadas del desarrollo de este Trabajo de Fin de Máster. Se expondrán las conclusiones asociadas recogidas por capítulos:

- En el *Capťulo 2* se han expuesto los fundamentos teóricos que respaldan la investigación realizada. Se ha descrito una línea de investigación sólida, conformada por un marco conceptual potente y ampliamente desarrollado desde los años 90 y numerosas investigaciones al respecto, que a su vez legitiman nuestro trabajo.

- En el *Capťulo 3* se han establecido los fundamentos metodológicos que sustentan la investigación realizada. El haber realizado un estudio de tipo cualitativo, de corte descriptivo y analítico, con un proceso de obtención de información inductiva, éste se ha convertido en el instrumento perfecto para poder conseguir los objetivos perseguidos en este trabajo.

- El *Capťulo 4* se constituye como eje central de este trabajo, en el que se realiza de forma detalla y meticulosa el análisis pertienente respecto de la información recogida.

1. En la primera parte del capítulo se ha realizado la implementación de las redes sistémicas, que constituye un perfecto instrumento de análisis para efectuar un estudio descriptivo de las respuestas proporcionadas por el alumnado. Se han elaborado un total de 14 redes sistémicas, una para cada una de las preguntas[1] y curso, obteniendo una herramienta visual poderosa que permite obtener una idea global de forma rápida del perfil de la estructura de cada pregunta, considerando a todos los alumnos de cada grupo.

2. En la segunda parte del capítulo se han analizado las líneas de coherencia, mediante la construcción previa de tablas resumen de cada una de las preguntas involucradas y

[1]Considerando los apartados (a) y (b) de las *Preguntas 2 y 4*.

por curso. Se han obtenido un total de 6 líneas de coherencia, tres para cada curso, cada una de las cuales representa una visión finitista, actual o potencial del inifinito, basado en las respuestas de los alumnos; y que nos permitirá categorizarlos en función de sus esquemas conceptuales respecto del infinito. Reseñar que en los estudios previos de (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002) se ha obtenido esta misma clasificación a grandes rasgos, con la salvedad de que en las investigaciones de la Dra. Garbin se producía un desdoblamiento en la primera línea de coherencia (finitista) en base a las respuestas obtenidas para la *Pregunta 2*. Finalmente, ha sido imposible clasificar todas y cada una de las respuestas presentadas por los alumnos, dado que no encajaban en ninguna de las líneas de coherencia propuestas o bien que no eran catalogables. Esta consideración tiene sus consecuencias en el análisis posterior de cara a la categorización del alumnado.

Destacar que los alumnos no suelen hacer una mención explícita directa acerca de la finitud o infinitud del proceso involucrado, con lo que será necesario realizar una interpretación a posteriori de las respuestas. Este hecho puede ser indicativo de que los alumnos no hayan sido capaz de percibir la alusión a la infinitud en alguna de las cuestiones, tal y como se evidencia en una de los principales resultados de la *Pregunta 1*, donde los alumnos proporcionan una respuesta basados únicamente en argumentos geométricos, sin necesidad de considerar la finitud o infinitud del proceso. Este fenómeno indica claramente cuán importante va a ser el registro de representación empleado en cada caso para el alumnado. Otro factor importante a tener en cuenta, es que los resultados indican un alto porcentaje de alumnos alojados en un esquema conceptual finitista, frente a un pequeño grupo de alumnos que presenta una inclinación potencial del infinito o actual.

Con todo ello, se ha conseguido categorizar a los estudiantes en función de las líneas de coherencia construidas según ciertas pautas preestablecidas por (Garbin, 2000). De esta forma, se han obtenido un total de 4 grupos según las respuestas coherentes de los estudiantes: Línea 1 o finitista, Línea 2 o actual, Línea 3 o potencial y Linea 1-3 o combinación equitativa de los procesos finitistas y potenciales. Mencionar que una clasificación similar ha sido obtenida en las investigaciones base (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005), donde únicamente aparece una quinta clasificación, la línea mixta.

3. En una tercera parte, se han analizado y clasificado a los alumnos por las incoherencias e inconsistencias presentadas en sus respuestas, empleando el estudio previo de la construcción de las líneas de coherencia. La categorización tiene lugar en tres grupos

distintos: *alumnos coherentes y consistentes*, *alumnos coherentes pero inconsistentes* y *alumnos incoherentes*. Mencionar que no se han encontrado alumnos en la primera de las categorías, dada la escasez de respuestas actuales proporcioandas por los participantes. Los resultados permiten vislumbrar que los alumnos alojados en la categoría de *coherentes pero inconsistentes* se incluyen en una línea finitista de pensamiento, mientras que los alumnos *incoherentes* pueden pertenecer a cualquier categoría, incluyendo aquí los esquemas conceptuales potenciales y actualistas.

4. En la última parte de este capítulo se ha hecho una breve referencia al análisis e importancia del lenguaje de representación empleado en relación a las respuestas aportadas por los alumnos.

- Finalmente, se desea realizar una breve comparación entre los resultados obtenidos por los dos grupos clase de 3º y 4º de Educación Secundaria.

- Se considera que el presente estudio puede tener numerosas implicaciones didácticas. La primera de ellas versa por una invitación a reflexión y análisis de los resultados obtenidos, que nos permite conocer cómo se aproxima nuestro alumnado a un determinado concepto matemático. En segundo lugar, el presente análisis muestra las posibles incoherencias en las líneas de pensamiento de los estudiantes, íntimamente relacionadas con los registros de representación empleados. Ser consciente, como docente, de este tipo de limitaciones y circunstancias en el alumnado puede repercutir muy beneficiosamente en la labor didáctica asociada. Además, estos resultados pueden tener aplicaciones directas y positivas en la construcción de problemas reales contextualizados en el Aula de Secundaria.

- Desde el punto de vista de las perspectivas de trabajo futuras, sería interesante continuar con el análisis propuesto en las investigaciones de la Dra. Garbin, (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005), mediante la implementación de un segundo cuestionario y una entrevista, con el fin de analizar en profundidad la tarea de conexión entre las diferentes representaciones matemáticas. Además, se podría extender este tipo de estudio a otros conceptos matemáticos que sean objeto de tratamiento mediante distintas representaciones conceptuales y que presenten problemas en el Aula, tales como el concepto de función, continuidad... Y finalmente, otra aplicación posible sería el diseño de experiencias didácticas reales en el Aula, que permitieran comprobar los resultados obtenidos, y en caso afirmativo, implementar actividades para fomentar una mejor comprensión por parte de los alumnos del concepto matemático tratado en cuestión.

Bibliografía

Barahmand, A. (2017). The Boundary Between Finite and Infinite States Through the Concept of Limits of Sequences. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(3), 569–585. doi: 10.1007/s10763-015-9697-3

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad* (Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca). Descargado de http://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76247/1/DDMCE_Belmonte_Martinez_JL_Modelos_intuitivos_y_esquema.pdf

Belmonte, J. L., y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *14*(2), 139–171.

D'Amore, B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese,di dubbi. *La Matemática e la sua Didattica*, *3*, 322–335.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., y Brown, A. (2005, 01 de Mar). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335–359. doi: 10.1007/s10649-005-2531-z

Fischbein, E., Tirosh, D., y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 2–40.

Fischebein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–19.

Fischebein, E. (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *4*, 365–401.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16–17 años* (Tesis Doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona.

Garbin, S. (2005). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(1), 61–80.

Garbin, S., y Azcárate, C. (2000). Esquemas conceptuales e incoherencias de en relación con el infinito actual. *Educación Matemática*, *12*(3), 5–18.

Garbin, S., y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que evidencian en alumnos de bachillerato. *SUMA*, *38*, 53–67.

Garbin, S., y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16–17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(1), 87–113.

Luis, E., Moreno, A., y Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 211–231. doi: 10.1007/BF00368339

Riscos, A. (1996). Aritmética infinita. *Epsilon*, *34*, 91–98.

Rucker, R. (1995). *Infinity and the mind: The science and philosophy of the infinite*. Princeton University Press.

Sierra, M., González, M., y López, C. (1999). Evolución histórica de los conceptos de límite funcional y continuidad en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1985. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(3), 463–476.

Sierra, M., González, M., y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *RELIME*, *2*(1), 71–87.

Sierra, M., González, M., y López, C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Evolución histórica de los conceptos de límite funcional y continuidad en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1985*, *29*, 77–94.

Singer, F. M., y Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. , *27*(3), 188–205. doi: 10.1016/j.jmathb.2008.06.001

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof mathematical thinking. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 495–511.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking mathematical thinking. *Actas del PME*, *1*(19), 61–75.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12*, 111–29.

Tirosh, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 199–214). Dordrecht: Springer Netherlands.

Tirosh, D., y Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 33–40. doi: 10.1080/0020739960270105

Tsamir, P., y Tirosh, D. (1999). Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 213. doi: 10.2307/749611

Apéndice A

Documentación complementaria

En este anexo se incluirá la documentación complementaria pertinente empleada en la elaboración y desarrollo del presente trabajo. La información anexada a continuación constituye un pilar vital y fundamental para poder comprender y complementar en su totalidad a este Trabajo de Fin de Máster, titulado *Estudio exploratorio del concepto de infinito actual en el Aula de Secundaria: inconsistencias e incoherencias*. Como elementos constituyentes del presente *Apéndice* se adjuntan los siguientes elementos:

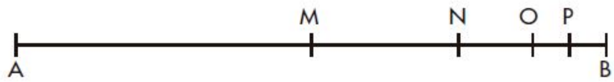
- Modelo del cuestionario implementado en el estudio desarollado.
- Redes sistémicas para las diferentes preguntas y los cursos estudiados.
- Respuestas excluidas en la determinación de las líneas de coherencia.
- Cuestionarios de los alumnos que han servido como soporte para el presente trabajo.

Nº:

Cuestionario

1. Observa la siguiente figura.

Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir, los puntos M, N, O, P son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}, \overline{MB}, \overline{NB}$ y $\overline{OB}$, respectivamente:



Si se siguen haciendo más y más bisecciones, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B? Explica tu respuesta.

2. Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura $\frac{h}{2}$.

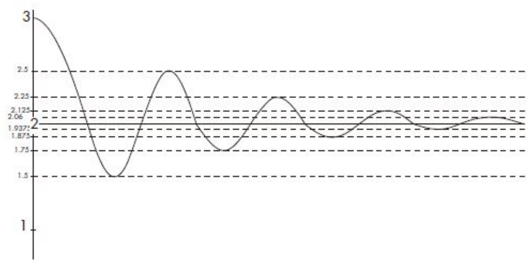
- ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.
- ¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

3. Considera la siguiente suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta.

4. La siguiente figura representa la gráfica de una función:



Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. ¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace muy grande? Explica tu respuesta.

5. Considera la siguiente ecuación:

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta $y = 2$? Explica tu respuesta.

A.1. Redes sistémicas

A.1.1. Pregunta 1

- Pregunta 1
  - Responde afirmativamente
    - Proceso iterativo de las bisecciones
      - - (2)
      - - Identifica un número grande o infinito de bi - secciones para poder llegar a B: (5), (17), (18)
      - - Los números son infinitos y siempre se puede dividir: (15)
    - Depende del número de divisiones: (6)
  - Responde negativamente
    - El punto se aproxima o tiende a B
      - - Siempre existe un segmento que biseccionar, (los números son infinitos): (3), (14)
      - - El punto se acerca (infinitamente) a B pero nunca podrá tocarlo porque hay infinitos números: (10), (13)
      - - El punto medio de la bisección nunca podrá coincidir con B: (19)
    - Entre A y B existen infinitos números (con infinitos decimales): (4)
    - Hay números (términos) infinitos y siempre se podrá dividir el segmento en segmentos más pequeños: (7), (16)
    - Habría que hacer infinitas bisecciones: (8)
    - B nunca puede llegar a ser el punto medio de un segmento: (9)*, (21)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (1)*

FIGURA 9: *Pregunta 1*. Red sistémica para el curso 3º de ESO

- Pregunta 1
  - Responde afirmativamente
    - Proceso iterativo de las bisecciones
      - - (1), (7)
      - - Número infinito de bisecciones para poder llegar a B: (2)
    - El segmento a bisecar cada vez se hace más pequeño, y en algún punto se alcanzará B: (3), (8)
    - Es una sucesión geométrica, cada vez se multiplica por $\frac{1}{2}$, y el límite infinito de la sucesión es 0, por lo que se alcanza B: (6)
  - Responde negativamente
    - - El punto se aproxima o tiende a B
      - El punto medio de la bisección nunca podrá coincidir con B, ya que es un extremo
        - - (9), (10)
        - - El límite de las divisiones es B: (13)
    - - No se puede construir el segmento $\overline{BB}$: (4)
    - - Hay infinitos números y al hacer la bisección siempre va a dar otro número: (5)
    - - No sería una bisección: (19)
    - - El punto medio de la bisección no puede coincidir con B, ya que es un extremo (punto fijo o referencia): (12), (15), (20)
    - - B no puede ser el punto medio de un segmento: (22)
  - Distingue entre teoría y práctica
    - Matemáticamente, el problema se resuelve como un límite, por lo que el valor "∞"de éste será B; aunque teóricamente nunca se podría alcanzar: (11)
  - No responde: (14)

FIGURA 10: *Pregunta 1*. Red sistémica para el curso 4º de ESO

A.1.2. Pregunta 2

- Pregunta 2(a) Distancia recorrida
  - Responde afirmativamente y determina la distancia
    - - $\frac{h}{2}$: (5), (6)
    - - Expresa la distancia total como la suma de las alturas de cada bote: (18)*
  - Responde afirmativamente pero no determina la distancia
    - - Expresa la distancia total como la suma de las alturas de cada bote: (1), (13), (15), (16)*, (21)
    - - Expresa la distancia como una divisón continua entre 2 hasta que el rebote sea mínimo: (3)
    - - Se puede calcular mediante una sucesión, al dividir sucesivamente entre 2. La distancia total es la suma de lo anterior: (4)
    - - Se puede calcular dividiendo sucesivamente la altura entre 2: (19)
    - -Teorema de Pitágoras: (7)
  - Responde negativamente
    - No se puede calcular la distancia porque no te dicen cuántos metros avanza la pelota (en cada bote): (9)*, (10)
  - No da una respuesta explícita: representación gráfica sin respuesta directa: (2)*
  - No responde: (8), (14)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (17)

FIGURA 11: *Pregunta 2(a)*. Red sistémica para el curso 3º de ESO

- Pregunta 2(b) Número de rebotes
  - Responde afirmativamente y determina el número de rebotes
    - - 4 botes: (2)
    - - Dará la mitad de botes porque la altura se divide entre 2: (5)
    - -Altura dividida entre 2, $\frac{2}{2} = 1$: (6)
    - -(16)*
  - Responde afirmativamente pero no determina el número de rebotes
    - - (21)
    - - Depende de las circunstancias físicas del problema
      - - (18), (19)
      - - Fuerza aplicada y la potencia: (1)
      - - Rozamiento: (3)
    - - El número de rebotes se puede determinar mediante el cálculo de los elementos de la suma (dividiendo entre 2) hasta que dé 0: (4)
    - - Ditancia de Pitágoras dividido entre $\frac{h}{2}$: (7)
    - - La pelota va a rebotar el número de veces que se divida por $\frac{h}{2}$: (8)
    - - El número de botes es finito, hasta que se pare la pelota: (9)
    - - Se puede determinar el número de botes contándolos (cuando la altura llegue a 0): (13), (10)*
    - - La mitad del bote resultante: (15)
  - No responde: (14)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (17)

FIGURA 12: *Pregunta 2(b)*. Red sistémica para el curso 3º de ESO

- Pregunta 2(a) Distancia recorrida
  - Responde afirmativamente y determina la distancia
    - - Expresa la distancia como la sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$, $a_1 = 2m, a_2 = 1m, a_3 = 0{,}5m, a_4 = 0{,}25m....$ La suma total es muy cercana o tiende a 4: (13)*
    - - Distancia = $n\frac{h}{2}$ (distancia de la primera vez por el número de veces que rebota): (14)*
  - Responde afirmativamente pero no determina la distancia
    - - (22)*
    - - En los primeros rebotes es fácil calcular la altura (cálculo matemático explícito) pero al ir dando más botes, la altura irá disminuyendo a alturas tan pequeñas que no podremos diferenciar, y en algún momento la pelota se parará: (2)*
    - - Siempre hay alguna forma de calcularlo: (3)*
    - - Sucesión geométrica, 2, $\frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}$, .., la altura siguiente se calcula como la mitad de la anterior: (5)
    - - Expresa la distancia total como la suma de las alturas de cada bote (2, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, ..) (hasta que no rebote): (6), (8)
    - - Conociendo las circunstancias físicas del problema
      - - Tiempo de movimiento de la pelota: (7)
      - - Velocidad y aceleración: (12)*
    - - La altura se calcula dividiendo entre 2, cada vez da una h diferente y se halla: (9)*
    - - Límite de la suma de los valores de las alturas, da como resultado un valor numérico: (11)
    - - Fórmula: (19)*
    - - Dividiendo sucesivamente la altura entre 2: (20)
  - Responde negativamente
    - - (4)*
    - - Depende de las circunstancias físicas del problema: Velocidad (y tiempo en caer): (15), (1)
    - - Mediante una fórmula desconocida: (10)*

FIGURA 13: *Pregunta 2(a)*. Red sistémica para el curso 4º de ESO

- Pregunta 2(b) Número de rebotes
  - Responde afirmativamente y determina el número de rebotes
    - - 1 ó 2: (14)*
  - Responde afirmativamente pero no determina el número de rebotes
    - - (2)*, (4)*, (22)*
    - - Depende de las circunstancias físicas del problema
      - - El material de la pelota: (7)
      - - Peso, densidad y facilidad para botar de la pelota: (10)*
    - - Hallando el término final de la sucesión: (5)
    - -Es necesario determinar la altura, porque tiene muchos rebotes: (6)
    - - Se puede hallar con una fórmula, pero es difícil determinarlos botes próximos al suelo: (8)
    - - Hasta que h llegue a 0, cuando se para la pelota: (9)*
    - - Cada rebote realizado es la mitad del anterior: (12)*
    - - La pelota no puede quedarse infinitamente botando por la acción de la gravedad: (13)
    - - Hacen falta más datos: (15)
    - - Fórmula: (19)*
    - - Hasta que no se pueda dividir más, hasta que llegue a 0: (20)
  - Responde negativamente
    - Se desconoce la velocidad y el tiempo en caer: (1)
  - - Los botes son infinitos pero muy pequeños: (3)*
  - Distingue entre teoría y práctica
    - Matemáticamente, daría ∞ botes, pues todos los valores de $\mathbb{R}$ se pueden dividir entre 2. Pero en el universo existe el rozamiento, con que el número de botes será finito: (11)

FIGURA 14: *Pregunta 2(b)*. Red sistémica para el curso 4º de ESO

A.1.3. Pregunta 3

- Pregunta 3
  - Respuesta cuantitativa
    - - 2 ó ∞, ya que hay numeradores infinitos: (4)
    - - ∞
      - - (16)
      - - Infinitos o muchos sumandos (números): (6), (21)
      - - Infinitos términos y progresión geométrica: (18)
      - - Sucesión geométrica de los denominadores (se multiplican por 2): (8), (14)
    - - $\frac{63}{32}$: (15)*(Suma explícita de fracciones hasta el término $\frac{1}{32}$)
    - - Resultado par: (19)
  - Respuesta cualitativa
    - - La suma se puede calcular como una suma ordinaria de fracciones: (1)
    - - Suma de fracciones (sucesión) donde se multiplica sucesivamente por 2: (2)*, (10), (17)
    - - Sucesión de numeradores aritméticos $d = 0$ y denominadores geométricos $r = 2$. La suma es un número fraccionario de numerador aritmético y denominador geométrico, ambos números positivos: (3)
    - - Progresión aritmética de numeradores y geométrica en los denominadores: (13)
    - - Progresión geométrica, el denominador se va multiplicando por 2 y el numerador queda igual: (7)
  - El denominador es el doble cada vez 2, 4, 8, 16..: (5)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (9)*

FIGURA 15: *Pregunta 3*. Red sistémica para el curso 3º de ESO

- Pregunta 3
  - Respuesta cuantitativa
    - - Tiende a 2
      - - (5)
      - - Cada vez que sumamos el próximo número dejamos un espacio que será rellenado por la mitad, y así infinitamente: (11)
      - - Nunca llegará a 2, pero si lo hacemos con la calculadora redonde a este número: (13)
    - - $\frac{1}{32}$: (2)
    - - $\frac{1}{2}$: (3), (15, al multiplicar el denominador siempre es el doble del anterior)
    - - $\frac{1}{2^n}$, donde n va tomando un valor más mayor: (20)
    - ∞
      - - La suma es infinito: (1)
      - - Siempre dividida por un número par: (7)
  - Respuesta cualitativa
    - - Progresión aritmética: (4)
    - - Suma de los n términos de la sucesión geométrica (razón $\frac{1}{2}$): (6)
    - - Suma geométrica, de razón 2: (22)
  - - Multiplicar por $\frac{1}{2}$ y continuar la sucesión: (8)
  - - Los denominadores se van multiplicando por 2: (9), (12)
  - - Se va restando $\frac{1}{2}$ a cada número: (10)
  - - Se puede hallar con una fórmula: (19)
  - - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (14)*

FIGURA 16: *Pregunta 3*. Red sistémica para el curso 4º de ESO

A.1.4. Pregunta 4

- Pregunta 4(a). Descripciones cualitativas
  - Comportamiento oscilatorio
    - - La recta va disminuyendo según va avanzando en la función pero luego volverá a aumentar: (1)
    - - Cuanto mayor es el valor de x mayor es la onda: (14)
    - - A medida que el valor de x aumenta el dibujo asciende, creando máximos de la función: (15)
    - - Para valores muy grandes de x la función baja a los niveles más bajos de la misma, ya que cuanto más bajo es el valor más bajo se colocan: (17)
    - - Va de positivo a negativo todo el tiempo: (21)
  - Comportamiento asintótico horizontal
    - - (La función) tiende a 2: (4)
    - - La función será una función horizontalmente recta, ya que va disminuyendo: (10)
    - - Daría una función muy plana en el eje x ya que habría mucha separación en los números: (18)
  - Otros comportamientos
    - - Se disminuye equilibradamente (gradualmente): (3), (7)
    - - La función se va acortando en y y alargando en x: (16)
  - No responde explícitamente: (8), (13), (19)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (2), (5), (6), (9)

FIGURA 17: *Pregunta 4(a).* Red sistémica para el curso 3º de ESO

Pregunta 4(b).
El valor de la función

- Determina explícitamente el valor de la función
  - - (La función) tiende a 2: (4)
  - - Cuando x se hace muy grande es infinito: (14)
- Determina cualitativamente el valor de la función
  - - La función será horizontalmente recta, ya que va disminuyendo: (10)
  - - El valor de la función es positiva cuando x se hace muy grande: (15)
  - - Daría una función muy plana en el eje x ya que habría mucha separación en los números: (18)
  - - El valor más grande de x está en un valor positivo: (21)
- Sí se puede determinar
  - - Si tuviera los valores de y (la función): (7)
  - - No sabe cómo: (8)
  - - Tarde o temprano llegará al $(0, 0)$: (16)
  - - No tiene datos suficientes. El valor es el más alto y a la vez el más bajo: (17)
  - -Va aumentando gradualmente un número determinado de veces: (19)
- No se puede determinar: no tiene el valor de y: (13)
- No responde explícitamente: (1), (3)
- No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (2), (5), (6), (9)

FIGURA 18: *Pregunta 4(b)*. Red sistémica para el curso 3º de ESO

- Pregunta 4(a). Descripciones cualitativas
  - La función tiende a ∞
    - - (1)
    - - Es ilimitada y seguirá creciendo siempre. (10)
  - Comportamiento oscilatorio
    - - Tiene más amplitud la onda: (5)
  - Comportamiento asintótico horizontal
    - - Llegará un momento en el que las diferencias sean tan pequeñas que no se puedan diferenciar: (2)
    - - La gráfica terminará teniendo unas subidas y bajadas tan pequeñas que parecerá una recta, $y = 0$: (11)*
    - - Cuanto mayor es el valor de x, menor es el de y, la función tiende a $y = 2$: (13)
  - Otros comportamientos
    - - La y será más pequeña: (3), (19), (20)
    - - Los valores de y van siendo cada vez menores: (8)
    - - Los valores de y van disminyendo: (9)
    - - La función se verá más alargada en horizontal y más estrecha en vertical: (12)*
    - - Cada vez se hace más grande: (15)
  - No responde explícitamente: (6)
  - No responde: (4), (14)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (7)*, (22)

FIGURA 19: *Pregunta 4(a)*. Red sistémica para el curso 4º de ESO

- Pregunta 4(b). El valor de la función
  - Determina explícitamente el valor de la función
    - - 0, (La función se acerca a $y = 0$): (6), (11)*
    - - Para x grandes la función tiende a $y = 2$: (13)
  - Sí se puede determinar
    - - Habría que "maximizar"la gráfica: (5)
  - No se puede determinar
    - - (9)
    - -Tiende a ∞: (1)
  - No responde explícitamente: (2), (3), (8), (10), (12)*, (15), (19), (20)
  - No responde: (4), (14)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (7)*, (22)

FIGURA 20: *Pregunta 4(b)*. Red sistémica para el curso 4º de ESO

A.1.5. Pregunta 5

- Pregunta 5
  - Respuesta cuantitativa
    - $n = 1$: (3), (17)
    - $n = 6$: (4), (5), (15, determina la suma de fracciones hasta el término $\frac{1}{64}$)
    - $n = -1$, $\frac{1}{2^{-1}} = 2$: (10), (21)
  - Respuesta cualitativa
    - La suma de los denominadores será siempre 2: (1)
    - Progresión aritmética: (7)
    - Ir calculando hasta que dé 2: (8)
    - Tiene que ser una potencia negativa de 2: (13)
  - No tiene sentido: (6)
  - No sabe hacerlo
    - (9), (16)
    - Intuye que el resultado es un número negativo: (14)
  - No responde: (2)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (18), (19)

FIGURA 21: *Pregunta 5*. Red sistémica para el curso 3º de ESO

- Pregunta 5
  - Respuesta cuantitativa
    - - $n = 2$: (20)
    - - $n = 6$: (10)
    - - y tiende a 2
      - Aunque no se puede calcular el valor real de n porque los números son infinitos: (2)
    - - ∞
      - - Los números son infinitos: (1)
      - - Hay infinitas n, no tienen límite: (9)
      - - n debería ser infinito para que $y = 2$, pero realmente, para $n = \infty$ y será el número justo anterior a 2: (11)
      - - Cuando se alcance el infinito la suma total será 2: (13)
    - - Ningún valor de n hará la suma 2: (6)
    - - $\frac{1}{2^n}$ en la que n va aumentando: (14)
  - Respuesta cualitativa
    - - Fórmula de la sucesión, según sea aritmética o geométrica: (12)
    - -Fórmula: (19)
  - Se necesitaría otra ecuación para hallar $y = 2$: (8)
  - No sabe hacerlo: (3), (5), (7), (22)
  - No responde: (4)
  - No lo entiende o no contesta a lo que se le pregunta: (15)

FIGURA 22: *Pregunta 5*. Red sistémica para el curso 4º de ESO

Nota: En la parte superior de algunos números aparece el símbolo $*$. Este símbolo indica que el alumno designado aporta alguna información adicional relevante (o no) para la resolución del problema, como puede ser una representación gráfica, un cálculo numérico suplementario, implementación de fórmulas... Por razones logísticas no se han podido incluir adecuadamente en las redes sistémicas, con lo que se deriva su lectura y correspondiente análisis al cuestionario del alumno asociado.

A.2. Respuestas excluidas en las líneas de coherencia

Pregunta 1	
Otros	**Responde negativamente**
No responde a la pregunta	B no puede ser punto de bisección por ser extremo
1	9, 21

↓

Pregunta 3	
Otros	
No responde a la pregunta	Se refiere a la suma como serie o progresión sin especificar si el resultado es finito o no
5, 9	7, 10, 13

↓

Pregunta 2(a)	
Otros	
No responde a la pregunta	Se puede referir a la distancia como serie o progresión sin especificar si el resultado es finito o no
2, 8, 17	1, 13, 14, 15, 16, 19

Pregunta 2(b)
Otros
No responde a la pregunta
17

↓

Pregunta 4	
Otros	
No responde a la pregunta	No especifica si el proceso es finito o infinito
2, 5, 6, 8, 9, 19	1, 3

↓

Pregunta 5	
Otros	
No responde a la pregunta	Se refiere a la suma como serie o progresión sin especificar si el resultado es finito o no
2, 6, 9, 16, 18, 19	7

FIGURA 23: Respuestas excluidas para el curso 3º de ESO

Pregunta 1	
Otros	
No responde a la pregunta	B no puede ser punto de bisección por ser extremo
14	4, 12, 15, 19, 20, 22

↓

Pregunta 3	
Otros	
Mediante una fórmula	Se refiere a la suma como serie o progresión sin especificar si el resultado es finito o no
19	4, 12, 22

↓

Pregunta 2(a)	
Otros	
Responde sin especificar si el resultado es finito o no	Fórmula
2, 3, 4, 8, 22	10, 19

Pregunta 2(b)		
Otros		
Distingue entre la teoría y la práctica	Responde sin especificar si el resultado es finito o no	Fórmula
11	20	19

↓

Pregunta 4
Otros
No responde a la pregunta
4, 14, 7, 22

↓

Pregunta 5	
Otros	
No responden 3, 4, 5, 7, 15, 22	Se refiere a la suma como serie o progresión (fórmula) 12, 19

FIGURA 24: Respuestas excluidas para el curso 4º de ESO

A.3. Cuestionarios de los alumnos

A.3.1. Curso de 3º de Educación Secundaria

A continuación se adjuntan los cuestionarios implementados por los alumnos del curso de 3º de la E.S.O.

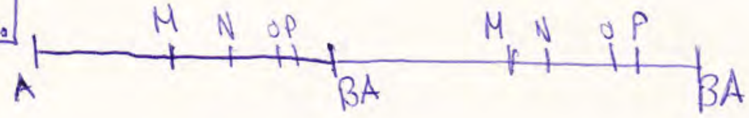
El número de cuestionarios asciende a un total de 18, habiendo participado los siguientes estudiantes:

(301)	(302)	(303)	(304)	(305)	(306)	(307)	(308)	(309)
(310)	(313)	(314)	(315)	(316)	(317)	(318)	(319)	(321)

1.

RESPUESTAS:

1.



Si seguimos haciendo bisecciones en esta figura, obtenemos todos los puntos A,B,M,N,O,P, tantas veces como dividamos esta figura, coincidiendo los puntos A con los B y respectivamente.

2. a) Como la pelota cada vez que cae al rebotar disminuye el valor, es decir, dividiendo la altura cada bote, así para resolver la distancia tendremos que sumar todas las alturas de cada bote.

b) Yo creo que la pelota dará tantos botes, como tanta fuerza haya aplicado al tirarla, hasta que ya esta se le acabe la fuerza seguirá dando botes, disminuyendo la potencia.

3. Esta suma se trata de una suma de fracciones, donde encontramos numeradores y denominadores, y para hallarla, tendremos que hacer el mínimo común múltiplo, y después los sumaremos numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.

$\boxed{4.}$ Pues en esta función, la recta va disminuyendo según va ~~el~~ avanzando en la función, pero luego volverá a aumentar.

$\boxed{5.}$

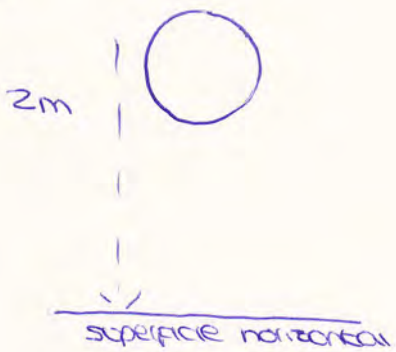
La suma de los denominadores serán siempre dos, ya que al hacer el mínimo común múltiplo nos dará de número dos.

N°2.

1- sin podría

1. si podría. la bisección podría llegar con el punto b, porque si se va bisecacionando si puede llegar.

2.



Rebota a una altura.

$\frac{h}{2}$.

$\frac{2}{2} = 1.$ 4 botes

$\frac{1}{1} = 1.$

3.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \ldots$$

• multiplicar x 2.

4.

no lo entiendo porque es muy difícil. porque no hay quien lo entienda

Nº 3

1

No, es posible llegar nunca al punto B haciendo bisecciones ya que siempre es la mitad de un número. Como mucho se aproxima en décimas a B, pero nunca llegará al punto B

2

Sí, sería siempre ir diviendo entre dos hasta que el número sea muy bajo, con decimales, ya que el rebote sería tan mínimo que el balón ya estaría parado, considerando el rozamiento.

3

Es una sucesión de numeradores aritméticos de "d" = 0, y denominadores geométricos de "r" = 2. Su suma sería un número fraccionario de numerador aritmético y denominador geométrico, con lo cuál el numerador será menor que el denominador y ambos números serán positivos.

(4)

En la siguiente gráfica se disminuye equilibradamente.

(5)

$n = 1$

Ya que cualquier número multiplicado por 1 queda el mismo número, es decir 2.

① No se podría llegar a juntar el punto B con la bisección ya que entre A y B existen infinitos decimales que impedirían que fuesen el mismo.

② Si se podría calcular por medio de que es una sucesión. Se puede dividir dos entre 2 y el resultado entre dos y así hasta que sea cero y después sumar todas las cifras
B) Sí se podría decir ya que es solo dividir entre 1 hasta que de cero y el numero de cifras que haya dado es el numero de botes

③ El valor de esta suma es 2 o también puede ser infinito ya que hay denominadores infinitos

④ A medida que x sea más grande el valor de y estaré cada vez más cerca del 2.

⑤ $n=6$ para que $y=2$ y que al final de todas las sumas sea 2

1. Coincidiría con el punto B porque al hacer tantas bisecciones chocaría con el punto B.

2. Sí podríamos calcular la distancia total de la pelota porque nos dice que al caer son 2 metros y al rebotar la altura, $\frac{h}{2}$.

   Dará la mitad de botes porque vamos a dividirlo entre dos la altura y se saca el rebote.

3. En el denominador es el doble de ese número cada vez, 2, 4, 8, 16 ...

4. No podría porque no lo entiendo.

5. Es dos elevado a la seis porque va elevándose de un número en un número, $2\ 2^2 . 2^3\ 2^4 \ldots 2^{\overset{6}{n}}$.

Nr. 8

1) Sí se puede llegar facilmente el punto de divición com el punto B porque se puede coincidir al contarlo.. depende de los diviciones que ~~hagas~~ agas hasta el punto B.

2) Sí poquo saveamos que se deja caer desde los 2 m y
a) que rebota hasta una altura $\frac{h}{2}$

b) Seria haltura – ~~4~~ 2 m dividido 2 $\frac{2}{2} = 1$

3) El valor es infinito porque tiene puntos suspensivos ~~ok~~ o sea que puede continuar mucho mas.
va ~~dar~~ a ser el numerador 1 y el numidor um numero ~~de~~ mas que 16.

4) No entiendo / Porque no entiendo donde esta la x.

5) Sí podria pero no es de decir! Porque no tiene sentido!

Nº 7

1 No porque hay números infinitos tantos como podemos dividir el segmento en porciones más pequeñas e iguales.

2 · Si se podría calcular, sabiendo que tenemos una altura y las metos hallamos pitagoras y nos da como resultado la distancia recorrida.

· Si, podríamos saberlo dividiendo la distancia resultante del pitagoras entre $\frac{h}{2}$ y así sabemos los rebotes.

3 en esta suma se va multiplicando por 2 el denominador mientras que el numerador es igual, es decir no varía. Progresión ~~aritmética~~ geométrica

4 Vemos como la gráfica va disminuyendo gradualmente Si, si supieramos los valores de Y correspondientes a la gráfica.

3(x), ?(y)

5 Progresion aritmética el numerador no varía y el denominador al numero elevado se le suma 1.

N° $\boxed{7}$

1. EN este ejercicio lo que hace es ir dividiendo por la mitad la recta y luego las resultantes.
Yo creo que esto no es posible llegar nunca hasta el punto B, porque son infinitos cortes.

2. Pues a ver creo que a ver la pelota va a rebotar el número de veces que se divida por $\frac{h}{2}$, es decir hasta que no ~~vuelva~~ tenga más espacio para rebotar.

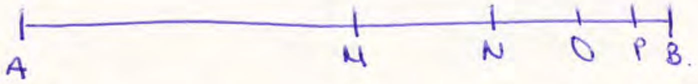
3. Creo que es una sucesión geométrica de los denominadores. Yo creo que el valor de esta suma es infinito. (Pero no se).

4. No se creo que sí se puede, pero no se porque

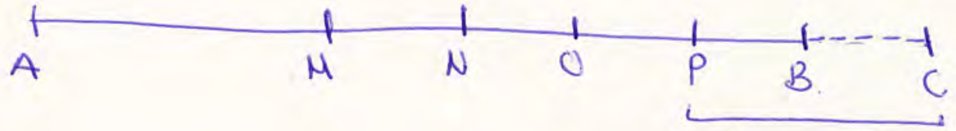
5. pues no se què número sería pero sería tan simple como ir calculandolo hasta que de 2.

Nº 9

1



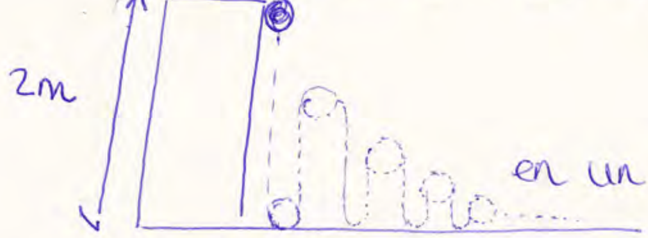
Creo que no es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B puesto que para que el punto B sea la mitad tiene que haber otros dos tal que el segmento llegaría desde A hasta C:



la bisección de $\overline{PC}$ sea B

2

- Creo que no podríamos calcular la distancia puesto que no te dicen cuántos metros recorre la pelota en cada bote (de un bote a otro)
- Sí se podrían hallar el número de botes puesto que cada vez que la pelota bota sube hasta la mitad de la altura anterior, es decir que un número limitado de botes la pelota se parará,



en un número de botes la pelota se parará. Dejando de lado la fuerza de rozamiento.

③

No lo entiendo porque no se como puedo hallar el valor, creo que abajo el denominador puedes sumarle el otro:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

$1+1 \nearrow$ $2+2 \nearrow$ $4+4 \nearrow$ $8+8 \nwarrow$

④ No entiendo lo que quiere decir el problema. No lo se hacer.

⑤ valor de n resulta $y = 2$
No se hacerlo.

Nº 10

1.

No, se podrá hacer coincidir el punto B, con un punto X, que divida la mitad de un segmento, ya que entre A y B, hay infinitos numeros, M y B, infinitos numeros... así consecutivamente, por lo tanto nunca se coincidiran dos numeros, con el B, porque el punto se acercará infinitamente, pero nunca llegará a tocarlo.

2.

• No se puede calcular la distancia total, ya que no hay ningun dato, que diga cuanto avanza la pelota.

• Si se podra calcular cuantos botes, porque, si la pelota cae desde 2m, ~~el~~ el primer bote, sera $\frac{2}{2}$, que es 1m, el siguiente $\frac{2}{4}$, el siguiente $\frac{2}{6}$ ... así respectivamente, por lo tanto cuando la división de como resultado 0, la pelota habrá llegado al suelo y se podrán contar los botes que ha dado

3.

El valor de la suma es una sucesión, por lo tanto en el denominador se va ~~[illegible]~~ multiplicando por 2 cada vez, que va avanzando, ~~[illegible]~~.

4.

Cuando x es muy grande la función igualmente acabará siendo una función horizontalmente recta, ya que va disminuyendo cada vez mas.

5.

El valor de $n = 2$, debera de ser un número ~~[illegible]~~ menor a 0, para que ~~[illegible]~~ al realizar la división, ~~[illegible]~~ de como resultado un número entero, por lo tanto un número que dividido por 1 de 2 es $0{,}5 = 2^{-1}$, por lo tanto $\frac{1}{2^{n}} = 2$.

13

1º No creo que sea posible llegar a una situación en la que el punto de la bisección coincide con el punto B, porque... los números Reales son infinitos y se va a acercar sin llegar nunca a tocarlo

2:

- Si podrían calcular la distancia total dividiendo la altura cada vez que bote y sumando todos los términos.
- Si hasta que se quede sin dar botes podrías contarle las veces que ha botado pero es muy relativo porque también influye el viento que puede retener o parar la pelota o la propia pelota

3:
A mi parecer creo que los numeradores están en progresión ~~geométrica~~ aritmética sumando () y los denominadores en geométrica por 2

4: No no podria porque no tendria el valor de y

5: depende de los terminos que ~~tomes~~ sumes pero ~~[illegible]~~ tendria que ser una potencia negativa $\boxed{2^{-b}}$ para que la suma de $y = 2$

Nº19

(1)

No va a llegar al punto B, puesto que los números son infinitos y siempre se va a poder seguir dividiendo.

(3) El valor de la suma va a ser infinito, pues es una sucesión de números naturales en el denominador pues d=2, se va multiplicando el número anterior del denominador por dos.

(4)

lo que pasa es que cuanto mayor es el valor de x, mayor es la onda. ~~Pues~~ el valor de la función x cuando se hace muy grande es infinito.

(5)

Entiendo la pregunta, pero no se lo que hay que hacer, supongo que el resultado será un número negativo

②

• Sí se podría, pues es la suma de los botes, pues sabiendo la altura inicial se va dividiendo entre dos hasta ~~llegar~~ que deje de votar.

• Sí se puede pues la altura la vas dividiendo y te da el número de botes.

Nº: 15

Pregunta 1

Personalmente, yo creo que sí que es posible, ya que cualquier número se puede dividir a la mitad, y ya que los números son infinitos. Y, alguna vez se tendrá que llegar al punto B.

Pregunta 2

a) Yo creo que sí, haciendo la suma de los botes que ha dado.

b) Siempre será la mitad del bote resultante.

Pregunta 3

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=$$

$$\frac{32}{32}+\frac{16}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32}+\frac{2}{32}+\frac{1}{32}=$$

$$\boxed{\frac{63}{32}}$$

↑

Este sería el valor de la suma.

Ya que he utilizado el mínimo común múltiplo (M.C.M.), para hallar el factor común y poder realizar el valor de la suma, dada anteriormente.

Pregunta 4

Lo que yo veo es que a medida que el valor de x aumenta, en la gráfica el dibujo asciende, creando máximos de la función.

El valor de la función es positiva cuando x se hace muy grande.

Pregunta 5

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^n} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{2^6} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} =$$

Para $y = 2$ n resulta 6, ya que he seguido la línea consecutiva que dicha suma llevaba.

Nº: 16

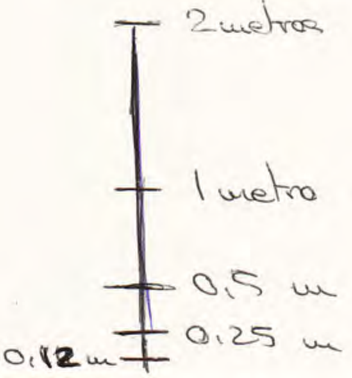
①

No es posible ya que desde A hasta B hay infinitos terminos y siempre habra un punto intermedio entre un segmento y B, ya que al haber infinitos terminos, no hay un final.

②

Si puedes calcular la distancia, ya que solo es ir sumando la distancia desde que la dejas caer, con la distancia que rebota la pelota.

Si puedes calcular los botes ya que divides la altura a la mitad y te da la segunda altura, y vuelve a botar y te da la tercera, y así sucesivamente



$$\frac{2}{2} = 1\,m \qquad \frac{1}{2} = 0{,}5\,m \qquad \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\,m$$

$$\frac{0{,}25}{2} = 0{,}12\,m \qquad \frac{0{,}12}{2} = 0{,}06\,m \qquad \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03\,m$$

(3)

el valor de la suma es infinito, ya que el denominador es diferente, entonces la suma es infinita...

(4)

lo que pasa es que la funcion se va acortando en "y", y alargando en "x". Si se puede determinar el valor de x cuando se hace grande, puesto que tarde o temprano llegara al (0,0)

(5)

No se. Porque es muy dificil.

Nº17

Cuestionario

①

Si, es posible que si se hacen más y más bisecciones un punto de la bisección coincida con el Punto B ya que si el último punto antes de B es P podemos tomar que P está a un paso de B y por tanto el siguiente punto sería ~~BB~~ PB y ~~así~~ así sucesivamente con cualquier otra más.

②

- Sí, ya que sabiendo que es una altura h y diciendo que rebota hasta una altura $\frac{h}{2}$ quiere decir que rebota (~~la mitad de esa altura y si se podría~~) ~~hasta 2 metros~~ hasta 2 metros al lanzarla de una altura que es h.

- Hará ~~tantos~~ rebotes como sea el valor h desde donde se lanza la ~~altura~~ bola dependiendo de ya que al rebotar 2 metros sólo nos hace falta saber de cuanta altura cae y así podremos calcular cuantos botes da.

③

- El valor de esta suma yo creo que es ~~ella~~ suma ~~entera~~ pero ~~saliendo~~ multiplicando x2 ~~valores~~ los valores en el denominador ya que están multiplicados por dos y así sucesivamente multiplicando por 2 los denominadores.

④

- Para valores muy grandes x ocurre que la función ~~baja~~ a los niveles más ~~altos~~ bajos de la misma ya que cuando más alto es el valor más bajo se coloca.

- Sí, sé ~~lo~~ ~~entiendo~~ lo sé hacer ~~el~~ valor de la función cuando x se hace muy grande ya que me parece que ~~no~~ tengo datos suficientes para hacerlo y el valor ~~es~~ el más alto y a la vez el más bajo.

⑤

- Para el 2 ~~ya~~ que está elevado a 1 sigue siendo n y explica el comienzo de porque es $y = 2$.

Nº 18.

1.

Si, porque al seguir haciendo bisecciones va a llegar un punto en el que no se pueden hacer más y B sea el punto medio y la bisección

2.

Si se podría. Sumas toda la distancia que sube y todos los botes que da.

$\frac{2}{2} = 1m$ $\frac{1}{2} = 0'5m$ $\frac{0'5}{2} = 0'25m$ $\frac{0'25}{2} = 0'125m$ $\frac{0'125}{2} = 0'0625m.$

$\frac{0'0625}{2} = 0'03125m$ $\frac{0'03125}{2} = 0'015625m.$

Si hay aire, si esta cuesta abajo, cuesta arriba, da distinto número de botes.

3.

Va a dar infinito porque se pueden sumar infinitos números y es una progresión geométrica.

4.

Daría una función muy plana en el eje x ya que habría mucha separación en los números

5.

Este ejercicio no lo entiendo ~~porque~~

Cuestionario Nº 19

Ejercicio número 1.

• En mi opinión yo creo que no se llegaría nunca al segmento B ya que si se divide hacia la derecha, la mitad todo el tiempo nunca vas ha llegar aunque te acerques bastante

Ejercicio número 2.

• Sí se puede calcular la distancia total ya que siempre va ha ser la mitad de la altura inicial, es decir, si la primera altura es "x", la segunda será $\frac{x_1}{2}$, la tercera $\frac{x_3}{2}$, etc...

• Daría un número diferente con cada altura y fuerza que se aplicara a la pelota, el número de rebotes depende de la altura.

Ejercicio número 3.

• El valor de la suma va ser siempre el doble del primero, es decir, del anterior, y además será un resultado par.

Ejercicio número 4.

- Si se podría calcular ya que va aumentando gradualmente un número determinado de veces

Ejercicio número 5.

- Para que "n" resulte $\underline{\underline{y=2}}$ se devería ir restando una unidad menos a partir de la fracción: $\frac{1}{2^4} \to \frac{1}{2^3} \to \frac{1}{2^2} \to \frac{1}{2^1}$.

$\boxed{\text{N° 20}}$

1. No se llegaría al punto B porque con este punto siempre se hacen las bisecciones.

2.
- La distancia recorrida es la suma de la distancia que recorre en cada bote ~~porque~~ y esa distancia cuenta para la suma porque es un espacio recorrido.
- Sí, porque sería ir disminuyendo la distancia de cada bote 2 veces menos cada bote hasta llegar de 2m a 0m.

3. Es infinito porque puedes seguir la suma hasta infinitos números.

4. Que va de positivo a negativo todo el tiempo.
Que el valor más grande de x esta en un valor positivo.

~~5. n= 724 porque elevado a 2 da el último valor para que la suma sea 2.~~

5.
$n = -1$, porque 1 dividido entre 2^{-1} es 2.

A.3.2. Curso de 4º de Educación Secundaria

A continuación se adjuntan los cuestionarios implementados por los alumnos del curso de 4º de la E.S.O.

El número de cuestionarios asciende a un total de 18, habiendo participado los siguientes estudiantes:

(401)	(402)	(403)	(404)	(405)	(406)	(407)	(408)	(409)
(410)	(411)	(413)	(413)	(414)	(415)	(419)	(420)	(422)

Nº: 1

(1.)

sí es posible puesto que llegara al infinito al hacerse más y más bisecciones coincidira con el punto B

(2.)

$2m = h$

$\frac{h}{2}$

a) No porque no tengo la velocidad ni lo que tardo en caer

B) tampoco no tengo ni velocidad, ni tiempo

(3.) infinito. puesto que la suma es infinito

(4.) No porque la funcion tiende a infinito

(5.) Si, seria infinito, no hay un limite de numeros. Son infinitos

1. Sí, creo que si se siguen dividiendo los segmentos infinitamente, el punto de la bisección, coincidirá con el punto B, pero será tras dividir el segmento muchas veces, pero ~~como~~ si esto, se hace infinitamente, por muy pequeños que sean los nuevos segmentos, se seguirá avanzando en la recta hasta el punto B.

2. En los primeros rebotes, sería fácil calcularla, pero según va dando más botes, estos cada vez son de menos altura y pasa como en el ejercicio anterior la pelota no se para del todo, pero al botar, alcanza alturas tan pequeñas, que no las podemos diferenciar, y en algún momento la pelota se parará. Pero, aún así, se pueden ~~contar~~ calcular la distancia y los rebotes de la pelota.

Lanzamiento
2 m

rebote	1	2	3	4	5	6	7
distancia alcanzada	1 m	0,5 m	0,25 m	0,125 m	0,0625 m	0,03125 m	0,015625 m

rebote	8
distancia alcanzada	0,0078125

3. Creo que el siguiente valor debe ser $\frac{1}{32}$, ya que desde el inicio se ha sumado la mitad del ~~primer~~ número x de la izquierda y la mitad de $\frac{1}{16}$ es $\frac{1}{32}$.

Si lo que pide es el resultado de la suma, sin añadir un valor más, este es 31, añadiendo un valor más, es 63.

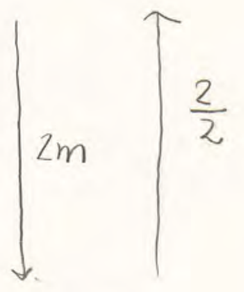
4. Al ser mayores, los valores que x, cada vez, la función tiene más forma de recta, entonces, llegará un punto, donde, aunque no sea exactamente una recta, al ser tan pequeñas las diferencias, no se podrá diferenciar a simple vista.

5. No ~~hay ningún valor concreto~~ podría calcular ~~ese~~ valor, ya que llega a un punto donde la diferencia es muy pequeña, pero como el infinito no tiene fin, si se sigue añadiendo valores, habrá un punto en el que ~~lo~~ sea 2.

3.)

El valor de esta suma es $\frac{1}{2}$ porque cada vez le vas sumando $\frac{1}{2}$

2.)



a) Sí, porque hay siempre alguna forma de calcular este tipo de problemas

b) Se mantendría botando todo el rato pero serían unos botes muy muy pequeños

5.) Nose

1) Si porque cada vez va disminuyendo su medida entonces algún día coincidirá con B o estará muy cerca de tocarlo

4
Pues que cada vez es mas grande x la y será mas pequeña
P(2,2,5)

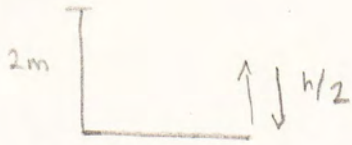
5.

Nº 4

1.

No, porque no puede haber un punto $\overline{BB}$

2.



· No.

· Si se podría

3. Es aritmético.

~~4~~.

4. Si se podría.

5.

(1).

No se van a llegar a juntar porque los números son infinitos. Porque cada vez que divides te va a dar un número.

(2).

- Sí, porque es una sucesión geométrica. $\left\{2, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8} \ldots\right\}$
Porque cada vez que sube tienes que dividir entre dos y esa va a ser la altura siguiente.
- Sí, hallando el término final de la sucesión.

(3).

No creo que llegue a más de dos porque menos el 1 el resto todo te va a dar menor que uno y al sumarlo todo, no llegará al 2.

(4).

Que tiene más amplitud la onda. Sí pero tendrías que "maximizar" la gráfica.

(5).

No sé.

Nº 6.

1

Sí porque es una sucesión geometrica y cada vez se multiplica por $\frac{1}{2}$ y si ~~hae~~ se hace el límite infinito de esa sucesión es 0, es decir, llegaría al punto B.

~~2~~
5

En esa suma ningún valor de n llegará a ser 2 porque cada vez se hará el número más pequeño y ~~nin~~ nunca llegará a ser 2.

4

Los valores de x cada vez se harán más pequeños y los valores muy grandes de x, su valor será 0.

2

La distancia total se calcularía sumando $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$
Sin calcular, no se podría decir cuantos rebotes hará la pelota porque tiene muchos.

3

El valor de ~~esa~~ esa suma será ~~el límite~~ la suma de todos sus n de la sucesión geometrica que cada n se multiplica por $\frac{1}{2}$. De esta manera conoceremos la suma total.

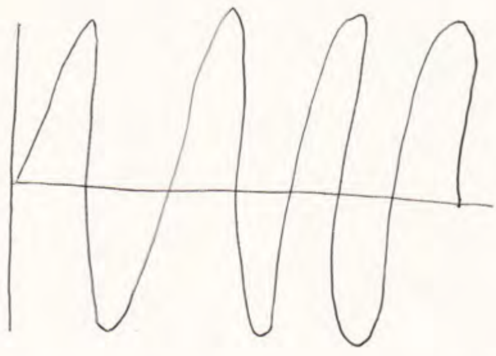
Nº7

1. Sí, creo que es posible por que al hacer y hacer y hacer bisecciones, llegará un ~~punto~~ momento en el que alcanzará el punto B.

2.
- Se podría calcular la ~~altura máxima~~ distancia recorrida de la pelota sabiendo el tiempo que ha estado la pelota en movimiento hasta estar quieta.
- No lo sé, porque depende del material con el que esté hecha la pelota puede botar más o menos veces.

3. Considero que el valor de esta suma es infinita y siempre dividida por un número par.

4. Valores grandes de x



Por que el valor de la x, si es mayor, tiene que ser grande tanto en positivo como en negativo.

$\boxed{5}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

No, basicamente porque no se como averiguarlo.

Nº8

1

Sí, ya que la distancia que hay entre ellas va siendo menor a medida de nos acercamos al punto B. Por lo que, si continúa así, puede que en algún momento coincida con B.

2

· Sí, ya que al saber que cuando rebota alcanza una altura de $\frac{h}{2}$, se puede hacer hasta que no rebote y sumar todos sus resultados, para hallar la distancia total.

· Se podría hallar con la fórmula, pero sería un poco difícil hallar los botes muy próximos al suelo que rebotan muchas veces.

3

Creo que el valor de esta suma es multiplicar por $\frac{1}{2}$ el primer número, y continuar con la sucesión.

4

A medida que los valores de x van aumentando, los valores de y van siendo cada vez menores.

$x = 2y$.

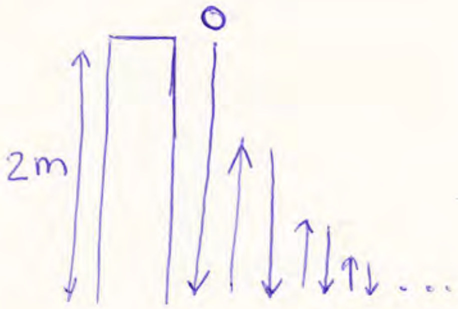
5

Ninguno de estos valores valdría, ya que el segundo término de $\frac{1}{2}$ da 0,5 y los siguientes dan números más pequeños o así sucesivamente, por lo que se necesitaría otra ecuación para hallar $y = 2$.

N-9

(~~1. Si porque cada vez se va alargando más y llegará un momento en que coincidan. En $\overline{BB}$~~) NO

2.



• Si se puede con el dato de que la altura es dos y el rebote es $\frac{h}{2}$ siempre, cada vez te da una h diferente y lo hallas

• Si hasta que la h llegue a cero, que hay se parará la pelota y estará a 0

3.

pues creo que en la siguiente suma $\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots\}$

se multiplican los denominadores es decir

$2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \dots$

4.

y los valores van disminuyendo, son infinitos

no se puede calcular un número ~~exact~~ exacto.

1. No estará muy cerca de hacerlo pero no ya que no se puede hacer la mitad de una misma llegará a su lado pero no propiamente a la B.

5. En la ecuación la n va en orden (1, 2, 3, 4, 5) por lo que hay infinitos n, no hay una final. No tiene un límite.

Nº10

$\boxed{3}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Debido a que la ~~[illegible]~~ diferencia es $\left(-\frac{1}{2}\right)$ por tanto se va restando $\frac{1}{2}$ a cada número.

$\boxed{4.}$

Infinito ya que la función es ilimitada y seguirá creciendo siempre.

$\boxed{5}$

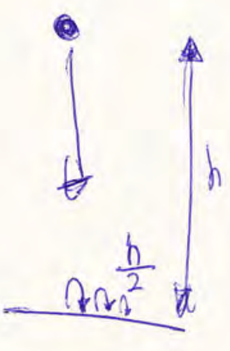
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots$$

$n=6$ ya que, según se van continuando los números se va dividiendo por 2 elevado a una potencia mayor ~~[illegible]~~; por ello es 6.

$\boxed{1.}$

No, ya que B siempre va a ser un extremo y nunca una bisección. Puede que sea un segmento muy pequeño, pero creo que siempre va a ser extremo.

$\boxed{2}$



A) No porque habría que hacerlo con alguna fórmula que desconozco.

B) No porque no sabemos el peso ni la densidad de la pelota, ni la facilidad que tiene para botar

1

Creo que este problema se resolvería como un límite por lo tanto el valor "∞" de este será B aunque teoricamente este nunca se prodría alcanzar

2

Creo que se podría hallar la distancia total recorrida por la pelota mediante la formula de límites de suma de todos los valores. Este resultado dara un valor numérico que será la respuesta al ejercicio

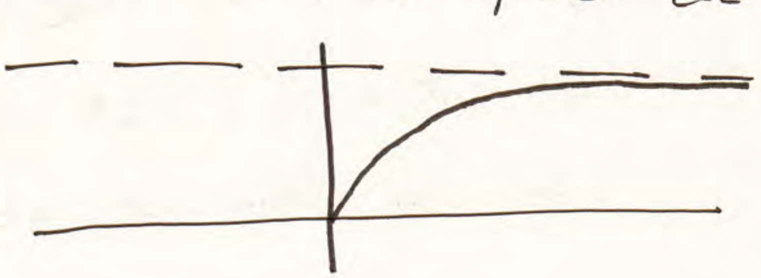
La pelota segun el enunciado dara ∞ botes debido a que todos los valores $\in \mathbb{R}$ se pueden dividir entre 2. Pero como en cualquier lugar del universo hay rozamiento la pelota dara un numero finito de botes

③

Creo que el valor de esta suma sera el número que va justo delante del 2 por lo tanto le daria un valor 2. Esto es debido a que cada vez que somamos el ~~siguiente~~ proximo número dejamos un espacio que sera rellenado por la mitad y asi infinitamente

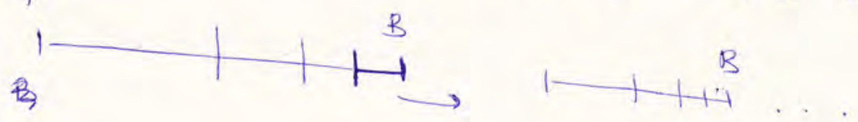
④

Creo que la grafica terminara teniendo unas subidas y bajadas tan pequeñas que parecera una recta todo esto ~~teniendo~~ se dara en el mismo ~~esp~~ espacio y valor de y este sera y = O. Se podria decir que se acercara a y = 0 de ~~forma~~ esta forma



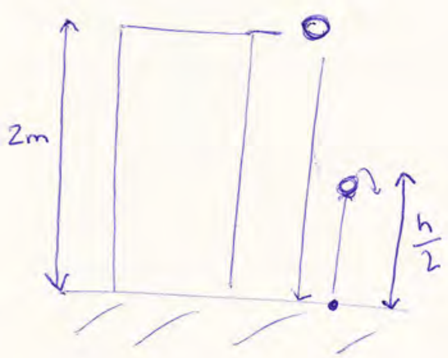
5 El valor que debe tomar "n" para que $y = 2$ debería ser "∞" aunque esto no es ~~del~~ todo cierto porque el valor que realmente tendría "y" cuando ~~[illegible]~~ $n = \infty$ será el número justo anterior a 2

1. El segmento AB está dividido; a la mitad lo corta M; a la mitad de M y B lo corta N, a la mitad de N y B lo corta O; a la mitad de O y B lo corta P. Esto podría seguir sucesivamente y cortaría el segmento P y B por la mitad. No creo que se llegue al punto B.



Podría coincidir si el punto anterior y el B es el mismo.

2.



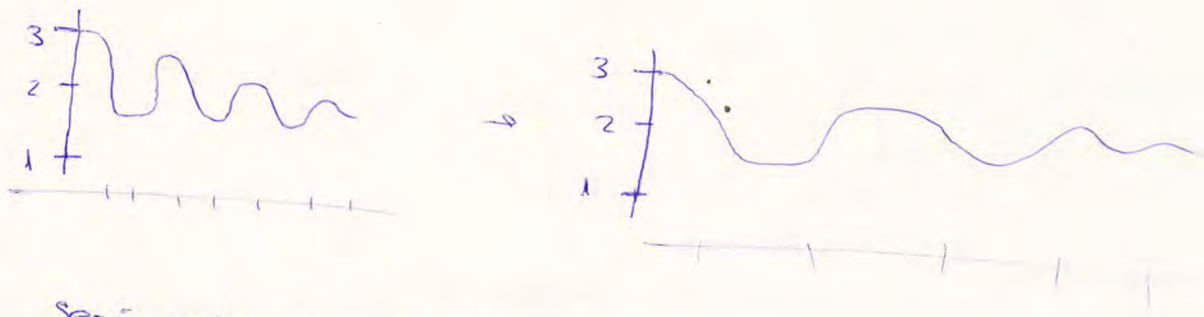
$$\frac{h}{2} = 1\,m$$

$$h = 2\,m$$

- Conociendo la velocidad se podría calcular; y también su aceleración. y el número de rebotes.
- Se podría conocer el número de rebotes ya que cada rebote que se realiza es la mitad del anterior.

3. El numerador no cambia y es denominador es multi-plicado por 2.

4. Si los valores de la x se hacen muy grandes; más de lo que están, la función gráficamente se verá ~~más~~ más alargada en horizontal y más estrecha en vertical:



Será más grande la función.

5. para que y = 2 ; se haría la fórmula de la sucesión, teniendo en cuenta si ~~e~~ la ecuación es aritmética o geométrica.

Nº 13

2.

$h = 2m$

a) $\frac{h}{2}$ $\quad a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_1 = 2m$

$a_2 = \Rightarrow \frac{a_1}{2} \Rightarrow a_1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 1m$

$a_3 = \frac{a_2}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{2^2} \Rightarrow a_1 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 0'5m$

$a_4 = \frac{a_1}{2^3} \Rightarrow 0'25m$

La suma total será muy cercana a 4, es decir se tiende a 4.

b) No es posible porque la pelota no puede quedarse infinitamente botando ya que sobre ella actua la fuerza de gravedad.

1.

No, es imposible puesto que por mucho que dividamos el segmento nunca se llegará al punto B, puesto que las divisiones cada vez serán mucho más pequeñas; y al final las divisiones de los segmentos más pequeños no llegarán a B, pero estarán muy próximos a este punto, es decir su límite será B.

3.

Pienso que la suma total será muy cercana a 2, nunca llegará a 2 pero si lo hacemos con la calculadora nos dará este número puesto que la calculadora redondea. Es decir la suma total tiende a 2.

4.

Cuanto mayor es el valor de x, menor es el de y; por tanto la función cuando x es un valor muy grande tienede a $y = 2$.
Por la misma razón que he expuesto en anteriores ejercicios.

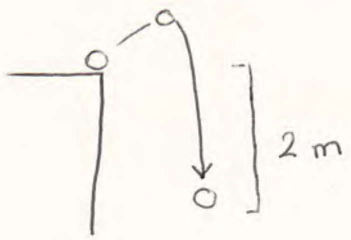
5.

$n = \infty$

Puesto que cuando se alcance el infinito, la suma total será 2.

N° 14

Problema 2.



- Distancia = $h \cdot \frac{h}{2}$

Porque la distancia será igual a la distancia de la primera vez que cae por el número de veces que rebota.

- 1 ó 2 porque si cae desde 2 metros no va a llegar muy alto.

Problema 5.

- $\frac{1}{2^n}$ en la que n va a ir sumando 1 cuando avanza.

Problema 3.

lo que va a pasar es que según aumenta, en el denominador, va a estar el número siguiente al anterior elevado al cuadrado. Por ejemplo:

$\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} \ldots$

$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \ldots$

Nº 15

1.

No, porque ~~por muchas bisecciones que se hagan, siempre van~~ a estar en el mismo lugar que en el dibujo

2.

- No, necesitaria saber la velocidad de la pelota.
- No, me harian falta más datos.

3.

El valor de la suma es $\frac{1}{2}$, porque al multiplicar el denominador siempre es el doble que el anterior

4.

Si, cada vez se hace más grande a medida que aumenta el valor de x.

5.

Para el valor de ~~en~~ fracción, si es la numero 8, $n=8$, si es la numero 20, $n=20$.

1.

No, porque al hacer más bisecciones en los segmentos anteriores siempre van a ser los mismos.

1.

No porque entoces no seria una bisección

4.

Cuanto más grande es la x, más pequeña se hace la y

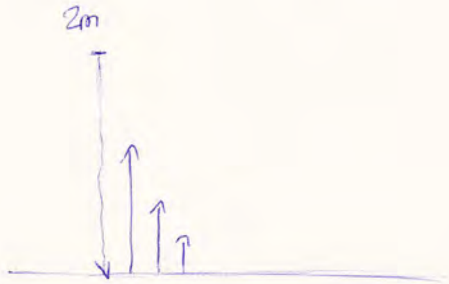
5.

Si, mediante una fórmula

3.

El valor se podria hallar mediante una fórmula

2.



Se podria calcular la distancia total recorrida mediante una fórmula

Se podria calcular el numero de rebotes mediante una fórmula

Nº20

1 Creo que no, porque siempre se va a tomar como referencia el punto B, por tanto no coincidirían.

2 Si, cada vez que caiga diviendo esa altura entre dos, donde llegue entre dos, y así sucesivamente.
Si, hasta que no se pueda dividir más, osea que llegue a 0.

4 Cuanto mayor valor le damos x más pequeña es la función.

5 Cuando $\boxed{n=2}$; $\frac{1}{2^2}$

3 El valor es $\frac{1}{2^n}$; donde n va tomando un valor más mayor, es decir, $n=2$, $n=4$, $n=6$...

Nº 22

3.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$$

Es una suma geométrica de números, de forma que si multiplicas el número por 2 te da el siguiente.

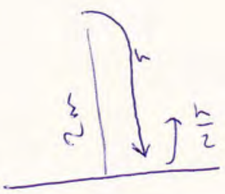
1. No, porque si partes por la mitad los segmentos que te da, nunca va a coincidir con B.

4.

- En los grandes de x se dispara, pero sólo en los grandes lo que quiere decir que hay un aumento de algo.

2.

- Si
- Si



5

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Si, pero nose como.